UAL
UNIVERSIDADE
AUTÓNOMA
DE LISBOA

Colectânea de Exercícios, Testes e Exames de Matemática, para Economia e Gestão

Bruno Maia
bmaia@ual.pt

1ª edição
2014

Conteúdo

Capítulo 1

Ficha 1

1.1 Exercícios: álgebra, equações, rectas e inequações

1. Simplifique:

   (a) $-3 + (-4) - (-8)$

   (b) $(-3)(-12)\left(-\frac{1}{2}\right)$

   (c) $-3[4 - (-2)]$

   (d) $-3(-x - 4)$

   (e) $2x\left(\frac{3}{2x}\right)$

   (f) $0 \cdot (1 - x)$

2. Desenvolva os produtos e simplifique os termos semelhantes:

   (a) $x^2(1 + x^3)$

   (b) $(4n - 3)(n - 2)$

   (c) $6a^2b(5ab - 3ab^2)$

   (d) $(3x - y)(x - 2y)$

   (e) $-x(2x - y) + y(1 - x) + 3(x + y)$

   (f) $r^2(r - 3s) + s^3 - (-s^3 - r^3 + 3r^2s)$

3. Expanda os produtos:

   (a) $(x + 2y)^2$

   (b) $\left(\frac{1}{x} - x\right)^2$

   (c) $(3u - 5v)^2$

   (d) $(2z - 5w)(2z + 5w)$

4. Factorize as seguintes expressões, colocando em evidência os factores comuns e/ou usando os casos notáveis da multiplicação:

   (a) $a^3 - a^2b$

   (b) $8x^2y^2 - 16xy$

   (c) $3x - 9y + 27z$

   (d) $7x^2 - 49xy$

   (e) $5xy^2 - 45x^3y^2$

   (f) $3x^2 - 12$

5. Resolva as seguintes equações:

   (a) $5x - 10 = 15$

   (b) $-5(3x - 2) = 16(1 - x)$

   (c) $3x = \frac{x}{4} - 7$

   (d) $\frac{x - 3}{4} + 2 = 3x$

   (e) $\frac{1}{2x + 1} = \frac{1}{x + 2}$

   (f) $|x - 4| = 2$

6. Resolva cada problema, formulando uma equação e resolvendo-a:

   (a) A soma do dobro de um número com 5 é igual à diferença entre esse número e 3. Que número é esse?

   (b) A Joana recebe o dobro por cada hora de trabalho para além das 38 horas semanais. Na semana passada ela trabalhou 48 horas e ganhou 812 euros. Quanto ganha por hora no horário de trabalho normal?

   (c) O Tiago investiu 15000 euros num depósito a prazo que paga uma taxa de juro anual de 10%. Quanto dinheiro adicional deverá depositar num outro depósito com uma taxa de juro anual de 12% se ele pretender ganhar um total de 2100 euros de juros ao final de um ano?

7. Determine o declive m, os pontos de intersecção com os eixos coordenados e esboce as seguintes rectas:

   (a) $y = 3x + 1$
   (b) $y = -2x + 4$
   (c) $y = \dfrac{x}{3} - 1$
   (d) $3x + 4y = 12$

8. Esboce as rectas contendo os seguintes pares de pontos e determine as respectivas equações:

   (a) $A = (1;1), \quad B = (3;2)$
   (b) $C = (-2;3), \quad D = (1;0)$
   (c) $E = (2;0), \quad F = (0;3)$

9. Determine as equações das rectas que satisfazem as seguintes condições:

   (a) Contém o ponto $(-2;3)$ e tem declive -3.

   (b) Contém o ponto $(-2;1)$ e tem declive 2.

10. Seja $f(x) = mx + b$, $f(2) = 3$ e $f(-1) = -3$. Quanto será $f(-3)$?

11. Resolva graficamente os seguintes sistemas de equações:

    (a) $\begin{cases} x - y & = & 5 \\ x + y & = & 1 \end{cases}$

    (b) $\begin{cases} 3x + 4y & = & 1 \\ 6x + 8y & = & 6 \end{cases}$

12. Resolva as seguintes inequações:

    (a) $2(x - 4) < 5$
    (b) $\dfrac{1}{3}(y - 3) + 4 \geq 2$
    (c) $|5 - 3x| \leq 8$
    (d) $|2x - 4| > 3$

13. Esboce no plano-xy as regiões definidas por:

    (a) $2x + 4y \geq 5$
    (b) $x - 3y + 2 \leq 0$
    (c) $100x + 200y \leq 300$

1.2 Resoluções propostas

1. (a) $-3+(-4)-(-8)=-3-4+8=-7+8=1$

   (b) $(-3)(-12)\left(-\dfrac{1}{2}\right)=(-3)\left(\dfrac{12}{2}\right)=(-3)6=-18$

   (c) $-3[4-(-2)]=-3[4+2]=-3\cdot 6=-18$

   (d) $-3(-x-4)=3x+12$

   (e) $2x\left(\dfrac{3}{2x}\right)=\dfrac{2x\cdot 3}{2x}=3$

   (f) $0\cdot(1-x)=0$

2. (a) $x^2(1+x^3)=x^2+x^2\cdot x^3=x^2+x^5$

   (b) $(4n-3)(n-2)=4n^2-8n-3n+6=4n^2-11n+6$

   (c) $6a^2b(5ab-3ab^2)=30a^3b^2-18a^3b^3$

   (d) $(3x-y)(x-2y)=3x^2-6xy-yx+2y^2=3x^2-7xy+2y^2$

   (e) $-x(2x-y)+y(1-x)+3(x+y)=-2x^2+xy+y-xy+3x+3y=-2x^2+3x+4y$

   (f) $r^2(r-3s)+s^3-(-s^3-r^3+3r^2s)=r^3-3r^2s+s^3+s^3+r^3-3r^2s=2r^3-6r^2s+2s^3$

3. (a) $(x+2y)^2=x^2+2\cdot x\cdot(2y)+(2y)^2=x^2+4xy+4y^2$

   (b) $\left(\dfrac{1}{x}-x\right)^2=\left(\dfrac{1}{x}\right)^2-2\cdot\dfrac{1}{x}\cdot x+x^2=\dfrac{1}{x^2}-2+x^2$

   (c) $(3u-5v)^2=(3u)^2-2\cdot(3u)\cdot(5v)+(5v)^2=9u^2-30uv+25v^2$

   (d) $(2z-5w)(2z+5w)=(2z)^2-(5w)^2=4z^2-25w^2$

4. (a) $a^3-a^2b=a^2(a-b)$

   (b) $8x^2y^2-16xy=8xy(xy-2)$

   (c) $3x-9y+27z=3(x-3y+9z)$

   (d) $7x^2-49xy=7x(x-7y)$

   (e) $5xy^2-45x^3y^2=5xy^2(1-9x^2)=5xy^2(1-3x)(1+3x)$

   (f) $3x^2-12=3(x^2-4)=3(x-2)(x+2)$

5. (a) $5x-10=15 \quad\Leftrightarrow\quad 5x=15+10 \quad\Leftrightarrow\quad 5x=25 \quad\Leftrightarrow\quad x=\dfrac{25}{5} \quad\Leftrightarrow\quad x=5$

   (b) $-5(3x-2)=16(1-x) \quad\Leftrightarrow\quad -15x+10=16-16x \quad\Leftrightarrow$
   $-15x+16x=16-10 \quad\Leftrightarrow\quad x=6$

   (c) $3x=\dfrac{x}{4}-7 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{4\cdot 3x}{4}=\dfrac{x}{4}-\dfrac{4\cdot 7}{4} \quad\Leftrightarrow\quad 12x=x-28 \quad\Leftrightarrow$
   $11x=-28 \quad\Leftrightarrow\quad x=-\dfrac{28}{11}$

(d) $\dfrac{x-3}{4}+2=3x \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{x-3}{4}+\dfrac{4\cdot 2}{4}=\dfrac{4\cdot 3x}{4} \quad\Leftrightarrow\quad x-3+8=12x \quad\Leftrightarrow$
$x-12x=3-8 \quad\Leftrightarrow\quad -11x=-5 \quad\Leftrightarrow\quad x=\dfrac{-5}{-11} \quad\Leftrightarrow\quad x=\dfrac{5}{11}$

(e) $\dfrac{1}{2x+1}=\dfrac{1}{x+2} \quad\Leftrightarrow\quad 2x+1=x+2 \ \wedge\ 2x+1\neq 0 \ \wedge\ x+2\neq 0 \quad\Leftrightarrow$
$2x-x=2-1 \ \wedge\ 2x\neq -1 \ \wedge\ x\neq -2 \quad\Leftrightarrow$
$x=1 \ \wedge\ x\neq -\dfrac{1}{2} \ \wedge\ x\neq -2 \quad\Leftrightarrow\quad x=1$

(f) $|x-4|=2 \quad\Leftrightarrow\quad x-4=-2 \ \vee\ x-4=2 \quad\Leftrightarrow\quad x=2 \ \vee\ x=6$

6. (a)

$$2x+5=x-3 \quad\Leftrightarrow\quad 2x-x=-3-5 \quad\Leftrightarrow\quad x=-8$$

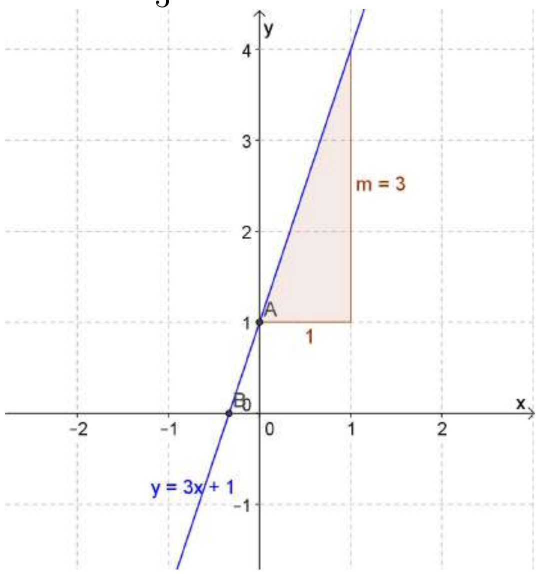
(b) 48 horas = 38 horas normais + 10 horas extraordinárias.
Seja x a remuneração por cada hora normal.

$$38x+10\cdot(2x)=812 \quad\Leftrightarrow\quad 38x+20x=812 \quad\Leftrightarrow\quad 58x=812$$
$$\Leftrightarrow\quad x=\frac{812}{58} \quad\Leftrightarrow\quad x=14 \text{ euros}$$

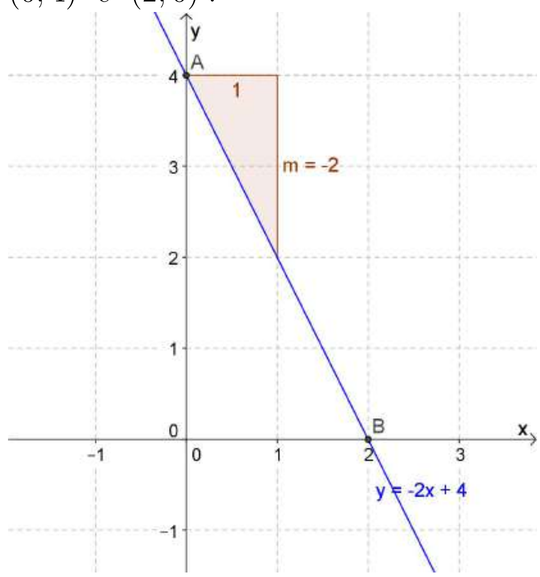
(c) O depósito A rende 10% de 15 000, ou seja: $0,10\times 15\,000=1\,500$.
Irá depositar uma quantidade adicional x no depósito B, que renderá 12% de x, ou seja: $0,12x$. De acordo com os dados do problema:

$$1\,500+0,12x=2\,100 \quad\Leftrightarrow\quad 0,12x=600 \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{600}{0,12} \quad\Leftrightarrow\quad x=5\,000 \text{ euros}$$

7. (a) $y=3x+1$
$m=3$;
$(0;1)$ e $(-\frac{1}{3};0)$.



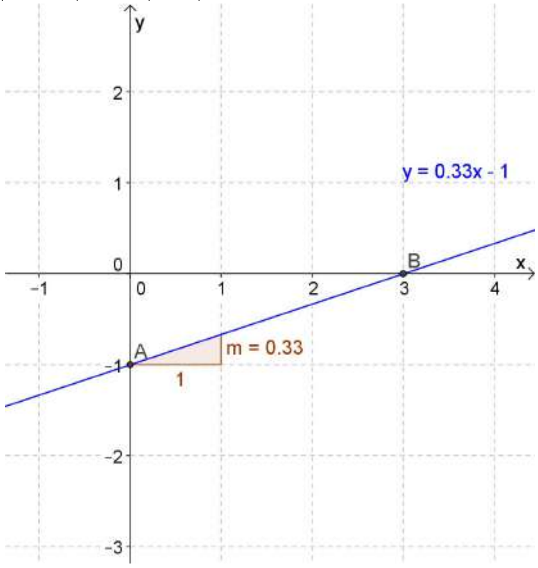
(b) $y=-2x+4$
$m=-2$;
$(0;4)$ e $(2;0)$.



(c) $y = \dfrac{x}{3} - 1$

$m = \dfrac{1}{3}$;

$(0;-1)$ e $(3;0)$.

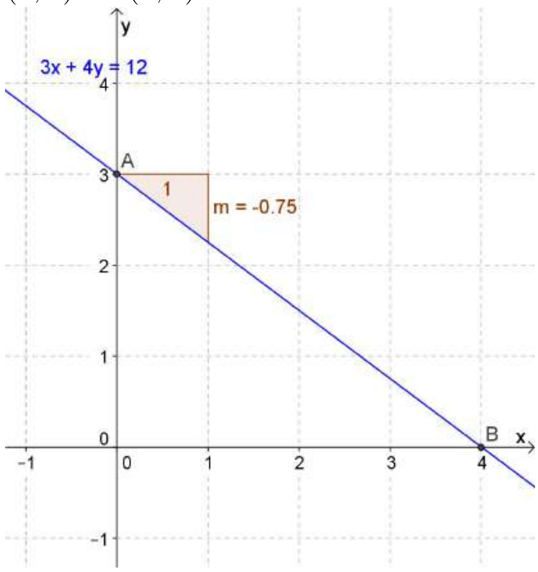


(d) $3x + 4y = 12 \quad \Leftrightarrow \quad 4y = -3x + 12$

$y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{12}{4} \quad \Leftrightarrow \quad y = -\dfrac{3}{4}x + 3$

$m = -\dfrac{3}{4}$;

$(0;3)$ e $(4;0)$.

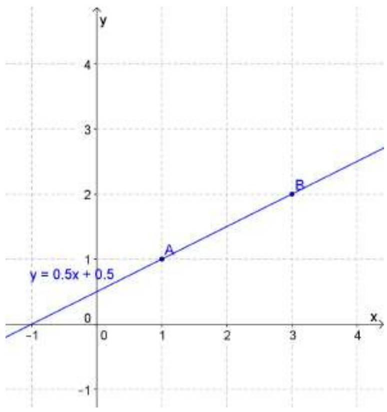


$A = (1;1)$
$B = (3;2)$

$$m = \frac{2-1}{3-1} = \frac{1}{2}$$

8. (a)

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x-1) \quad \Leftrightarrow$$
$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

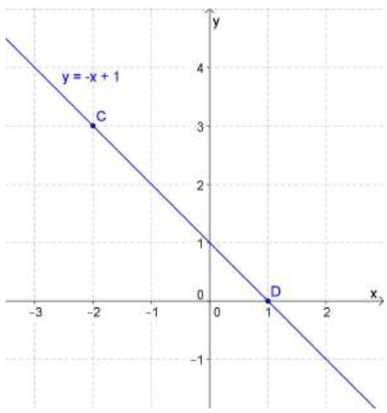


$C = (-2;3)$
$D = (1;0)$

$$m = \frac{0-3}{1-(-2)} = \frac{-3}{3} = -1$$

(b)

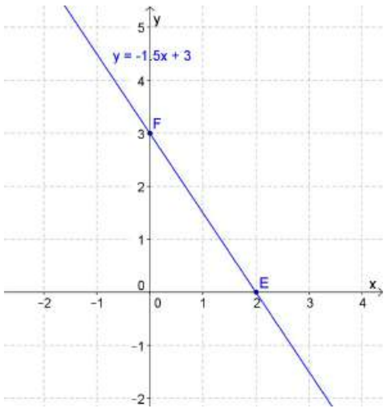
$$y - 0 = -1(x-1) \quad \Leftrightarrow$$
$$y = -x + 1$$



(c) $E = (2;0)$
$F = (0;3)$

$$m = \frac{3-0}{0-2} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

$$y = -\frac{3}{2}x + 3$$

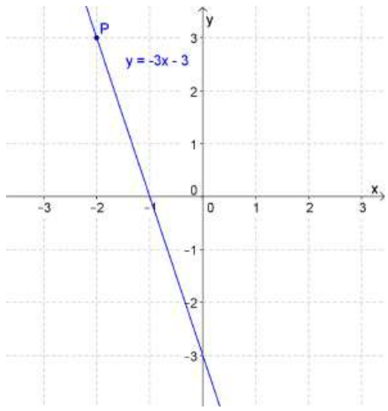


9. (a) Contém o ponto $(-2;3)$ e tem declive -3.

$P = (-2;3)$

$m = -3$

$y - 3 = -3\,(x - (-2)) \quad \Leftrightarrow$
$y = -3x - 3$

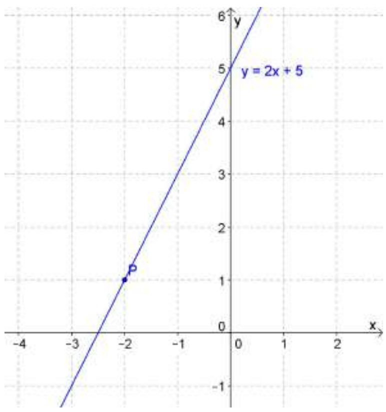


(b) Contém o ponto $(-2;1)$ e tem declive 2.

$P = (-2;1)$

$m = 2$

$y - 1 = 2\,(x - (-2)) \quad \Leftrightarrow$
$y = 2x + 5$



10.

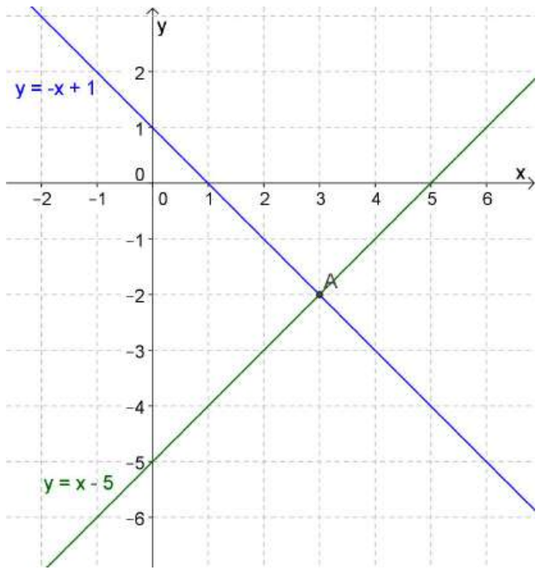
$$\begin{cases} f(2) = 3 \\ f(-1) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + b = 3 \\ -m + b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + b = 3 \\ b = m - 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m + (m-3) = 3 \\ b = m - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m = 6 \\ b = m - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

Logo $f(x) = 2x - 1$ e $f(-3) = 2(-3) - 1 = -7$.

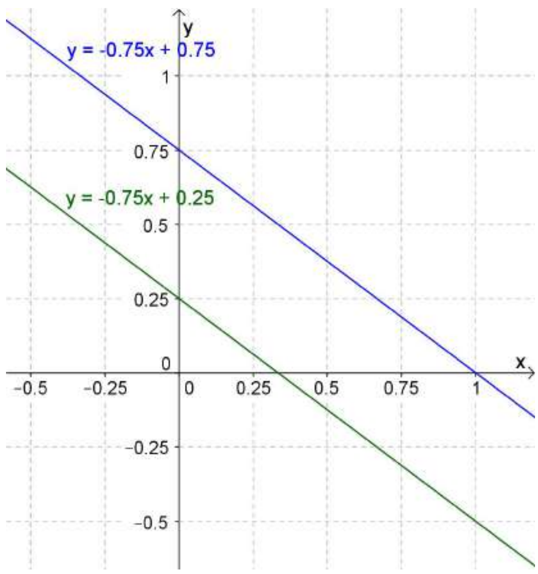
11. (a)

$$\begin{cases} x-y &= 5 \\ x+y &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y &= x-5 \\ y &= -x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 3 \\ y &= -2 \end{cases}$$



(b)

$$\begin{cases} 3x+4y &= 1 \\ 6x+8y &= 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y &= -3x+1 \\ 8y &= -6x+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y &= -\frac{3}{4}x+\frac{1}{4} \\ y &= -\frac{3}{4}x+\frac{3}{4} \end{cases}$$



Sistema impossível: rectas paralelas ($m=-3/4$) não se intersectam.

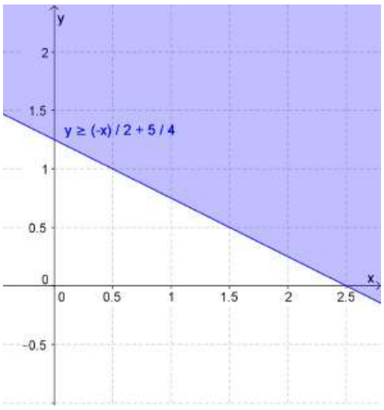
12. (a) $2(x-4)<5 \quad \Leftrightarrow \quad 2x-8<5 \quad \Leftrightarrow \quad 2x<13 \quad \Leftrightarrow \quad x<\frac{13}{2}$

(b) $\frac{1}{3}(y-3)+4\geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}(y-3)\geq 2-4 \quad \Leftrightarrow \quad y-3\geq -2\cdot 3 \quad \Leftrightarrow \quad y\geq -3$

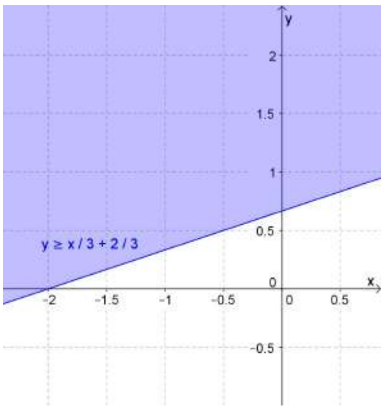
(c) $|5-3x| \le 8 \quad \Leftrightarrow \quad -8 \le 5-3x \le 8 \quad \Leftrightarrow \quad -8-5 \le -3x \le 8-5 \quad \Leftrightarrow \quad -13 \le -3x \le 3 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{-13}{-3} \ge x \ge \dfrac{3}{-3} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{13}{3} \ge x \ge -1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \le x \le \dfrac{13}{3}$

(d) $|2x-4| > 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2x-4 < -3 \vee 2x-4 > 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2x < -3+4 \vee 2x > 3+4 \quad \Leftrightarrow \quad 2x < 1 \vee 2x > 7 \quad \Leftrightarrow \quad x < \dfrac{1}{2} \vee x > \dfrac{7}{2}$

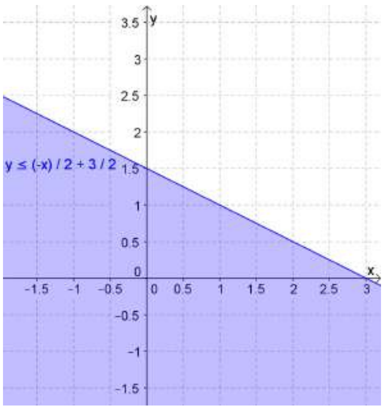
13. (a) $2x+4y \ge 5 \quad \Leftrightarrow \quad 4y \ge -2x+5 \quad \Leftrightarrow \quad y \ge -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{4}$



(b) $x-3y+2 \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad x+2 \le 3y \quad \Leftrightarrow \quad 3y \ge x+2 \quad \Leftrightarrow \quad y \ge \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}$



(c) $100x+200y \le 300 \quad \Leftrightarrow \quad x+2y \le 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2y \le -x+3 \quad \Leftrightarrow \quad y \le -\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$



Capítulo 2

Ficha 2

2.1 Exercícios: função quadrática, potências, função exponencial e logarítmica

1. Seja $f(x) = x^2 - 4x$.

   (a) Complete a seguinte tabela e esboce o gráfico de f:

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$							

   (b) Determine as coordenadas do vértice do gráfico de f.

   (c) Resolva $f(x) = 0$.

2. Seja $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 - x + \dfrac{3}{2}$.

   (a) Complete a seguinte tabela e esboce o gráfico de f:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$							

   (b) Determine o máximo de f (coordenada y do vértice).

   (c) Resolva $f(x) = 0$.

   (d) Mostre que $f(x) = -\dfrac{1}{2}(x-1)(x+3)$ e estude o sinal de $f(x)$ quando x varia. Compare com o gráfico de f.

3. Resolva as seguintes equações:

   (a) $x^2 + 7x = 0$

   (b) $4x^2 - 9 = 0$

   (c) $(x+3)(x-5) = 0$

   (d) $x^2 - 4x + 3 = 0$

4. Simplifique:

(a) $(2x)^4$

(b) $(2^3 2^{-5})^3$

(c) $(2^{-1} - 4^{-1})^{-1}$

(d)
$$\frac{24x^3y^2z^3}{4x^2yz^2}$$

(e)
$$\left[\left(\frac{x}{2}\right)^3 \cdot \frac{8}{x^{-2}}\right]^{-3}$$

5. Calcule (sem usar calculadora):

(a) $16^{1/4}$

(b) $5^{1/7} \cdot 5^{6/7}$

(c) $(4^8)^{-3/16}$

(d) $64^{1/3} + \sqrt[3]{125}$

6. Resolva as seguintes equações:

(a) $5^x = 25$

(b) $3^x = \dfrac{1}{3}$

(c) $3^{3x+1} = \dfrac{1}{81}$

(d) $10^{x^2-2x+2} = 100$

7. Se a população europeia aumentar $0,72\%$ anualmente, quantos anos demorará a duplicar?

8. A população do Botswana era de 1,22 milhões em 1989 e estima-se que cresceu $3,4\%$ por ano. Se $t = 0$ designar o ano 1989, determine a fórmula para a população $P(t)$ após t anos. Quantos anos demorará a duplicar?

9. Um depósito a prazo com composição anual de juros rende 12% por ano. Se depositar 100 euros, quanto terá após 15 anos?

10. Complete a seguinte tabela e esboce os gráficos de $y = 2^x$ e de $y = 2^{-x}$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x							
2^{-x}							

11. Defina uma função exponencial que contenha os seguintes pontos:

(a) $(0; 2)$ e $(2; 8)$

(b) $(0; 4)$ e $(4; 4^{-1})$

12. Exprima como múltiplos de $\ln 3$:

(a) $\ln 9$

(b) $\ln \sqrt{3}$

(c) $\ln \sqrt[5]{3^2}$

(d) $\ln \dfrac{1}{81}$

13. Resolva as equações:

(a) $5^x = 8$

(b) $\ln x = 3$

(c) $\ln[x(x-2)] = 0$

(d) $\ln(\sqrt{x} - 5) = 0$

14. Resolva:

(a) $3^x 4^{x+2} = 8$

(b) $3 \ln x + 2 \ln x^2 = 6$

(c) $4^x - 4^{x-1} = 3^{x+1} - 3^x$

(d) $\log_x e^2 = 2$

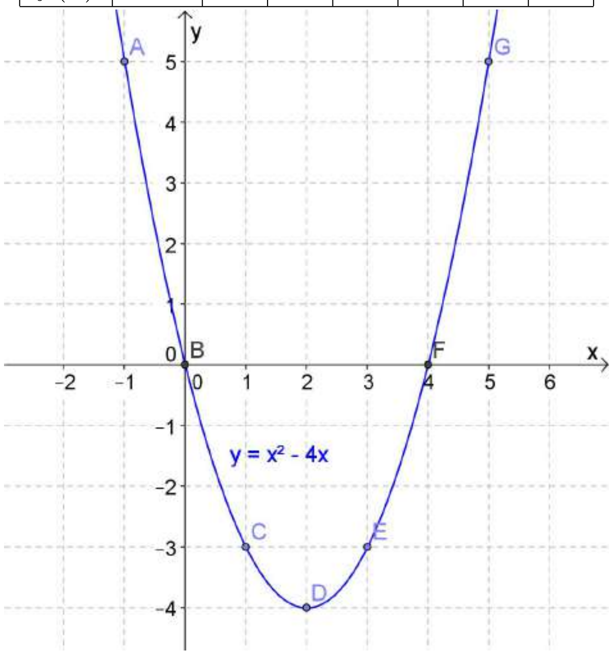
2.2 Resoluções propostas

1. Seja $f(x) = x^2 - 4x$.

(a)

$$\begin{array}{lcl}
f(-1) = (-1)^2 - 4(-1) = 5 & , & f(2) = (2)^2 - 4(2) = -4 \\
f(0) = (0)^2 - 4(0) = 0 & , & f(3) = (3)^2 - 4(3) = -3 \\
f(1) = (1)^2 - 4(1) = -3 & , & f(4) = (4)^2 - 4(4) = 0 \\
 & & f(5) = (5)^2 - 4(5) = 5
\end{array}$$

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	5	0	-3	-4	-3	0	5



(b) Se $f(x) = x^2 - 4x$, então $a = 1$ e $b = -4$.
A abcissa e a ordenada do vértice são:

$$V_x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2, \qquad V_y = f(V_x) = f(2) = -4,$$

logo as coordenadas do vértice são $(V_x, V_y) = (2, -4)$.

(c)

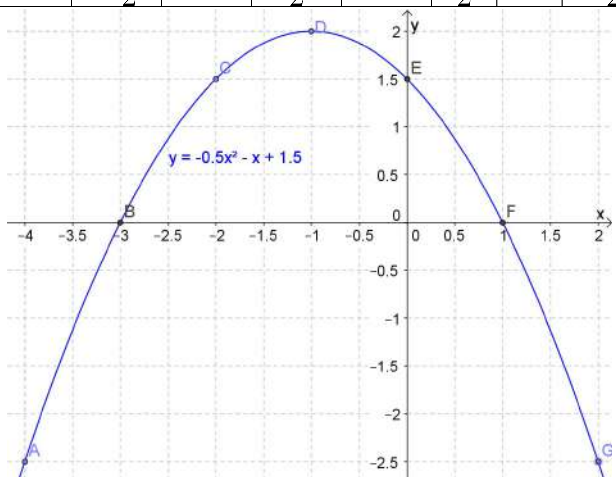
$$\begin{aligned} f(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - 4x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-4) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 0 \ \vee \ x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \vee \ x = 4 \end{aligned}$$

2. Seja $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 - x + \dfrac{3}{2}$.

(a)

$$\begin{aligned}
f(-4) &= -\frac{1}{2}(-4)^2 - (-4) + \frac{3}{2} = -8 + 4 + \frac{3}{2} = -\frac{5}{2} \\
f(-3) &= -\frac{1}{2}(-3)^2 - (-3) + \frac{3}{2} = -\frac{9}{2} + 3 + \frac{3}{2} = 0 \\
f(-2) &= -\frac{1}{2}(-2)^2 - (-2) + \frac{3}{2} = -\frac{4}{2} + 2 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \\
f(-1) &= -\frac{1}{2}(-1)^2 - (-1) + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 2 \\
f(0) &= -\frac{1}{2}(0)^2 - (0) + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \\
f(1) &= -\frac{1}{2}(1)^2 - (1) + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{2} = 0 \\
f(2) &= -\frac{1}{2}(2)^2 - (2) + \frac{3}{2} = -\frac{4}{2} - 2 + \frac{3}{2} = -\frac{5}{2}
\end{aligned}$$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$-\frac{5}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$



(b) Se $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 - x + \dfrac{3}{2}$, então $a = -\dfrac{1}{2}$ e $b = -1$.
A abcissa e a ordenada do vértice são:

$$V_x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2 \cdot (-1/2)} = -1, \qquad V_y = f(V_x) = f(-1) = 2,$$

logo o máximo de f é $f(-1) = 2$.

(c)

$$\begin{aligned}
f(x)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-x^2}{2}-\frac{2x}{2}+\frac{3}{2}=0\\
&\Leftrightarrow \quad -x^2-2x+3=0 \ \vee \ x^2+2x-3=0\\
&\Leftrightarrow \quad x=\frac{-(2)\pm\sqrt{(2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1}\\
&\Leftrightarrow \quad x=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{-2\pm 4}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x=-3 \ \vee x=1
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}(x-1)(x+3) &= -\frac{1}{2}(x^2+3x-x-3)=-\frac{1}{2}(x^2+2x-3)\\
&= \ -\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}=f(x)
\end{aligned}$$

		-3		1	
$-\frac{1}{2}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

f é negativa em $]-\infty,-3[\cup]1,+\infty[$ e é positiva em $]-3,1[$. Isto corresponde aos troços da parábola acima ou abaixo do eixo das abcissas.

3. (a) $x^2+7x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x+7)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0 \ \vee \ x=-7$

   (b) $4x^2-9=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2=\frac{9}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x=\pm\frac{3}{2}$

   (c) $(x+3)(x-5)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-3 \ \vee \ x=5$

   (d) $x^2-4x+3=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1} \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{4\pm 2}{2} \quad \Leftrightarrow$ $x=1 \ \vee \ x=3$

4. (a) $(2x)^4=2^4x^4=16x^4$

   (b) $(2^3 2^{-5})^3=(2^{3-5})^3=2^{-2\cdot 3}=2^{-6}=\frac{1}{64}$

   (c) $(2^{-1}-4^{-1})^{-1}=(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})^{-1}=(\frac{1}{4})^{-1}=4$

   (d)

$$\frac{24x^3y^2z^3}{4x^2yz^2}=\frac{24}{4}\cdot\frac{x^3}{x^2}\cdot\frac{y^2}{y}\cdot\frac{z^3}{z^2}=6xyz$$

   (e)

$$\left[\left(\frac{x}{2}\right)^3\cdot\frac{8}{x^{-2}}\right]^{-3}=\left[\frac{x^3}{2^3}\cdot 8\cdot x^2\right]^{-3}=\left[x^5\right]^{-3}=x^{-15}=\frac{1}{x^{15}}$$

5. (a) $16^{1/4}=(2^4)^{1/4}=2^{4/4}=2^1=2$

(b) $5^{1/7} \cdot 5^{6/7} = 5^{1/7+6/7} = 5^1 = 5$

(c) $(4^8)^{-3/16} = (2^{16})^{-3/16} = 2^{-3} = \dfrac{1}{8}$

(d) $64^{1/3} + \sqrt[3]{125} = (4^3)^{1/3} + (5^3)^{1/3} = 4 + 5 = 9$

6. (a) $5^x = 25 \quad \Leftrightarrow \quad 5^x = 5^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$

(b) $3^x = \dfrac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 3^x = 3^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$

(c) $3^{3x+1} = \dfrac{1}{81} \quad \Leftrightarrow \quad 3^{3x+1} = 3^{-4} \quad \Leftrightarrow \quad 3x+1 = -4 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\dfrac{5}{3}$

(d) $10^{x^2-2x+2} = 100 \quad \Leftrightarrow \quad 10^{x^2-2x+2} = 10^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x = 0$
$\Leftrightarrow \quad x(x-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \vee \ x = 2$

7.

$$P(t) = P_0 \cdot \left(1 + \frac{0,72}{100}\right)^t$$

$$2P_0 = P_0 \cdot 1,0072^t \quad \Leftrightarrow \quad 1,0072^t = 2 \quad \Leftrightarrow \quad t = \log_{1,0072} 2$$

$$\Leftrightarrow \quad t = \frac{\ln 2}{\ln 1,0072} \approx 97 \text{ anos}$$

8.

$$P(t) = 1,22 \cdot \left(1 + \frac{3,4}{100}\right)^t \quad \text{(população em milhões de habitantes)}$$

$$2 \cdot 1,22 = 1,22 \cdot 1,034^t \quad \Leftrightarrow \quad 1,034^t = 2 \quad \Leftrightarrow \quad t = \log_{1,034} 2$$

$$\Leftrightarrow \quad t = \frac{\ln 2}{\ln 1,034} \approx 21 \text{ anos}$$

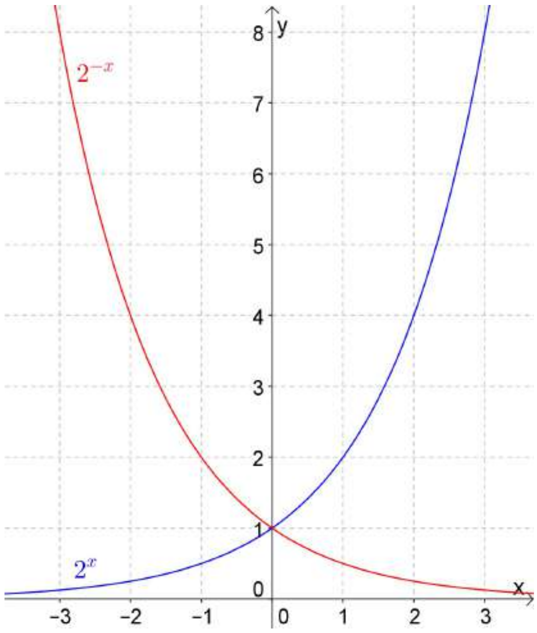
9.

$$D(t) = 100 \cdot \left(1 + \frac{12}{100}\right)^t$$

$$D(15) = 100 \cdot 1,12^{15} = 547,36 \text{ euros}$$

10.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
2^{-x}	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



11. (a) $(0; 2)$ e $(2; 8)$

    A função exponencial é da forma $f(x) = C \cdot b^x$.

    De acordo com as condições do enunciado:

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f(2) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C \cdot b^0 = 2 \\ C \cdot b^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 2 \\ 2 \cdot b^2 = 2^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 2 \\ b = 2 \end{cases}$$

    Assim sendo, $f(x) = 2 \cdot 2^x$.

    (b) $(0; 4)$ e $(4; 4^{-1})$

    De forma análoga:

$$\begin{cases} f(0) = 4 \\ f(4) = 4^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C \cdot b^0 = 4 \\ C \cdot b^4 = 4^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 4 \\ 4 \cdot b^4 = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 4 \\ b^4 = \dfrac{1}{4^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C = 4 \\ b^4 = \dfrac{1}{2^4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 4 \\ b^4 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 4 \\ b = \pm\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

    Como a base de uma função exponencial deve ser positiva, apenas nos interessa $b = \frac{1}{2}$, logo $f(x) = 4 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 2^{2-x}$.

12. (a) $\ln 9 = \ln 3^2 = 2 \ln 3$

    (b) $\ln \sqrt{3} = \ln 3^{1/2} = \dfrac{1}{2} \ln 3$

    (c) $\ln \sqrt[5]{3^2} = \ln 3^{2/5} = \dfrac{2}{5} \ln 3$

    (d) $\ln \dfrac{1}{81} = \ln 3^{-4} = -4 \ln 3$

13. (a) $5^x = 8 \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_5 8$

(b) $\ln x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = e^3$

(c) $\ln[x(x-2)] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-2) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-1)}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \pm \sqrt{2}$$

(d) $\ln(\sqrt{x} - 5) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x} - 5 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x} = 6 \quad \Leftrightarrow \quad x = 36$

14. (a) $3^x 4^{x+2} = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 3^x 4^x 4^2 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad (3 \cdot 4)^x = \dfrac{8}{16} \quad \Leftrightarrow \quad 12^x = \dfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow$

$$x = \log_{12} \frac{1}{2}$$

(b) $3 \ln x + 2 \ln x^2 = 6 \quad \Leftrightarrow \quad 3 \ln x + 4 \ln x = 6 \quad \Leftrightarrow \quad 7 \ln x = 6$

$$\Leftrightarrow \quad \ln x = \frac{6}{7} \quad \Leftrightarrow \quad x = e^{6/7}$$

(c) $4^x - 4^{x-1} = 3^{x+1} - 3^x \quad \Leftrightarrow \quad 4^x(1 - 4^{-1}) = 3^x(3-1)$

$$\Leftrightarrow \quad 4^x \cdot \frac{3}{4} = 3^x \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4^x}{3^x} = \frac{4}{3} \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{8}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_{4/3} \frac{8}{3}$$

(d) $\log_x e^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \log_x e = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \log_x e = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = e$

Capítulo 3

Ficha 3

3.1 Exercícios: derivadas

1. Calcule $f'(x)$, sem usar a regra de derivação do quociente:

   (a) $f(x) = \dfrac{15x^3 + 6x^2 - 3x + 2}{3}$

   (b) $f(x) = 7x - \dfrac{x}{4} + \dfrac{3}{x^3}$

   (c) $f(x) = \dfrac{2x - 3}{3x^2}$

   (d) $f(x) = \dfrac{x^3 + x - 3}{2x}$

   Sugestão: recorra a técnicas semelhantes a $\dfrac{x-2}{x^2} = \dfrac{x}{x^2} - \dfrac{2}{x^2} = x^{-1} - 2x^{-2}$.

2. Escreva cada função na forma $f(x) = k \cdot [u(x)]^r$ e use a regra de derivação da potência para calcular $f'(x)$:

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{(2x-1)^2}$

   (b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$

   (c) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt[3]{x^3 - x^2}}$

   (d) $f(x) = \dfrac{10}{x^2 - 3}$

3. Calcule $\dfrac{dy}{dx}$ usando a regra de derivação do produto:

   (a) $y = (x^2 + 3x - 5) \cdot (x^4 - x^2 + 1)$

   (b) $y = \sqrt{x} \cdot (2x + 1)^3$

   (c) $y = x^2 \cdot (x^2 - 2x)^4$

   (d) $y = (x - x^2)^3 \cdot \sqrt{x^2 + 1}$

4. Calcule $\dfrac{dy}{dx}$ usando a regra de derivação do quociente:

   (a) $y = \dfrac{x^2 + 1}{2x - 5}$

   (b) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{1 - 3x}$

   (c) $y = \dfrac{x^3}{(x - x^2)^4}$

   (d) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1 - 3x}}$

5. Defina $(f \circ g)(x) = f[\ g(x)\ ]$, determine o seu domínio e use a regra de derivação da função composta para calcular $(f \circ g)'(x)$:

(a) $f(y) = y^2$ e $g(x) = 2x + 7$

(b) $f(y) = 2y + 7$ e $g(x) = x^2$

(c) $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = 3 - 4x$

(d) $f(x) = 3 - 4x$ e $g(x) = \sqrt{x}$

6. Calcule $f'(x)$ e $f''(x)$:

(a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 5$

(b) $f(x) = \dfrac{2 - 3x}{x^2}$

(c) $f(x) = (x^2 - 3x)^3$

(d) $f(x) = x^2 - x + \dfrac{1}{1 - x}$

3.2 Resoluções propostas

1. (a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{15x^3 + 6x^2 - 3x + 2}{3}\right)' = \left(\frac{15x^3}{3} + \frac{6x^2}{3} - \frac{3x}{3} + \frac{2}{3}\right)' \\ &= \left(5x^3 + 2x^2 - x + \frac{2}{3}\right)' = 15x^2 + 4x - 1 \end{aligned}$$

(b)

$$f'(x) = \left(7x - \frac{x}{4} + \frac{3}{x^3}\right)' = \left(7x - \frac{1}{4}x + 3x^{-3}\right)' = 7 - \frac{1}{4} - 9x^{-4}$$

(c)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{2x - 3}{3x^2}\right)' = \left(\frac{2x}{3x^2} - \frac{3}{3x^2}\right)' = \left(\frac{2}{3}x^{-1} - x^{-2}\right)' \\ &= \frac{2}{3}(-1)x^{-2} - (-2)x^{-3} = -\frac{2}{3}x^{-2} + 2x^{-3} \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^3 + x - 3}{2x}\right)' = \left(\frac{x^3}{2x} + \frac{x}{2x} - \frac{3}{2x}\right)' \\ &= \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x^{-1}\right)' = x + 0 - \frac{3}{2}(-1)x^{-2} = x + \frac{3}{2}x^{-2} \end{aligned}$$

2. (a)

$$f(x) = (2x - 1)^{-2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = (-2)(2x - 1)^{-3}(2)$$

(b)

$$f(x) = (x^2 - 3x)^{1/2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 3x)^{-1/2}(2x - 3)$$

(c)

$$f(x) = 2(x^3 - x^2)^{-1/3} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2\left(-\frac{1}{3}\right)(x^3 - x^2)^{-4/3}(3x^2 - 2x)$$

(d)

$$f(x) = 10(x^2-3)^{-1} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 10(-1)(x^2-3)^{-2}(2x)$$

3. (a)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (x^2+3x-5)' \cdot (x^4-x^2+1) + (x^2+3x-5) \cdot (x^4-x^2+1)' \\ &= (2x+3) \cdot (x^4-x^2+1) + (x^2+3x-5) \cdot (4x^3-2x) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \left(x^{1/2}\right)' \cdot (2x+1)^3 + x^{1/2} \cdot \left((2x+1)^3\right)' \\ &= \frac{1}{2}x^{-1/2} \cdot (2x+1)^3 + x^{1/2} \cdot 3(2x+1)^2(2) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (x^2)' \cdot (x^2-2x)^4 + x^2 \cdot \left((x^2-2x)^4\right)' \\ &= 2x \cdot (x^2-2x)^4 + x^2 \cdot 4(x^2-2x)^3(2x-2) \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \left((x-x^2)^3\right)' \cdot (x^2+1)^{1/2} + (x-x^2)^3 \cdot \left((x^2+1)^{1/2}\right)' \\ &= 3(x-x^2)^2(1-2x) \cdot (x^2+1)^{1/2} + (x-x^2)^3 \cdot \frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}(2x) \end{aligned}$$

4. (a)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(x^2+1)' \cdot (2x-5) - (x^2+1) \cdot (2x-5)'}{(2x-5)^2} \\ &= \frac{2x \cdot (2x-5) - (x^2+1) \cdot 2}{(2x-5)^2} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\left(x^{1/2}\right)' \cdot (1-3x) - x^{1/2} \cdot (1-3x)'}{(1-3x)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{2}x^{-1/2} \cdot (1-3x) - x^{1/2} \cdot (-3)}{(1-3x)^2} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(x^3)' \cdot (x-x^2)^4 - x^3 \cdot \left[(x-x^2)^4\right]'}{\left[(x-x^2)^4\right]^2} \\ &= \frac{3x^2 \cdot (x-x^2)^4 - x^3 \cdot 4(x-x^2)^3(1-2x)}{(x-x^2)^8} \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{(x)' \cdot (1-3x)^{1/2} - x \cdot \left[(1-3x)^{1/2}\right]'}{\left[(1-3x)^{1/2}\right]^2} \\
&= \frac{1 \cdot (1-3x)^{1/2} - x \cdot \frac{1}{2}(1-3x)^{-1/2}(-3)}{1-3x}
\end{aligned}$$

5. (a) $f(y) = y^2$ e $g(x) = 2x+7$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[2x+7] = (2x+7)^2$$

O domínio de $f \circ g$ é $\mathbb{R}$. $f'(y) = 2y$ e $g'(x) = 2$, logo:

$$(f \circ g)'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x) = f'[2x+7] \cdot g'(x) = 2(2x+7) \cdot 2$$

(b) $f(y) = 2y+7$ e $g(x) = x^2$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left[x^2\right] = 2x^2 + 7$$

O domínio de $f \circ g$ é $\mathbb{R}$. $f'(y) = 2$ e $g'(x) = 2x$,logo

$$(f \circ g)'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x) = f'\left[x^2\right] \cdot g'(x) = 2 \cdot 2x$$

(c) $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = 3-4x$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[3-4x] = \sqrt{3-4x}$$

O domínio de $f \circ g$ é $\{x \in \mathbb{R} \ : \ 3-4x \geq 0\} = \left]-\infty, \frac{3}{4}\right]$.

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = -4 \ , \quad \text{logo}$$

$$(f \circ g)'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x) = f'[3-4x] \cdot g'(x) = \frac{1}{2}(3-4x)^{-1/2} \cdot (-4)$$

(d) $f(x) = 3-4x$ e $g(x) = \sqrt{x}$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left[\sqrt{x}\right] = 3 - 4\sqrt{x}$$

O domínio de $f \circ g$ é $\mathbb{R}_0^+$.

$$f'(x) = -4 \qquad \text{e} \qquad g'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} \ , \quad \text{logo}$$

$$(f \circ g)'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x) = f'\left[\sqrt{x}\right] \cdot g'(x) = -4 \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

6. (a)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(2x^3 - 3x^2 - x + 5\right)' = 6x^2 - 6x \\
f''(x) &= \left(6x^2 - 6x\right)' = 12x - 6
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{2-3x}{x^2}\right)' = \left(2x^{-2} - 3x^{-1}\right)' = -4x^{-3} + 3x^{-2} \\
f''(x) &= \left(-4x^{-3} + 3x^{-2}\right)' = 12x^{-4} - 6x^{-3}
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left[(x^2-3x)^3\right]' = 3(x^2-3x)^2(2x-3) \\
f''(x) &= \left[3(x^2-3x)^2(2x-3)\right]' = 3\Big(2(x^2-3x)(2x-3)\cdot(2x-3) + (x^2-3x)^2\cdot 2\Big) \\
&= 6(x^2-3x)(2x-3)^2 + 6(x^2-3x)^2
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left[x^2 - x + (1-x)^{-1}\right]' = 2x - 1 - (1-x)^{-2}(-1) \\
f''(x) &= \left[2x - 1 + (1-x)^{-2}\right]' = 2 - 2(1-x)^{-3}(-1)
\end{aligned}$$

Capítulo 4

Ficha 4

4.1 Exercícios: primitivas

1. Calcule as seguintes derivadas e indique as respectivas fórmulas de integração:

   (a) $\left[\, x \cdot (x^2 - 3) \,\right]'$

   (b) $\left(\dfrac{x}{x^2 + 3} \right)'$

   (c) $\left(\dfrac{1}{x^6} \right)'$

   (d) $\left(\sqrt{x^3 + 5} \right)'$

2. Calcule as seguintes primitivas:

   (a) $\displaystyle\int x^4 \, dx$

   (b) $\displaystyle\int x^{3/2} \, dx$

   (c) $\displaystyle\int x \cdot \sqrt[3]{x} \, dx$

   (d) $\displaystyle\int \frac{1}{x^6} \, dx$

3. Calcule as seguintes primitivas:

   (a) $\displaystyle\int \frac{1}{2x^3} \, dx$

   (b) $\displaystyle\int (x^3 - 2x + 5) \, dx$

   (c) $\displaystyle\int (x^{-3} + \sqrt{x} - 3x^{1/4} + x^2) \, dx$

   (d) $\displaystyle\int x(1 + x^3) \, dx$

4. Resolva os seguintes problemas com condição inicial:

   (a) $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt[3]{x}, \qquad y(1) = 2.$

   (b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}, \qquad y(1) = 0.$

5. Primitive pelo método de substituição de variável:

   (a) $\displaystyle\int 2x^3 (x^4 + 1)^{15} \, dx$

   (b) $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{4x^2 + 5}} \, dx$

   (c) $\displaystyle\int x\sqrt{x - 3} \, dx$

   (d) $\displaystyle\int t \cdot \sqrt{7t^2 + 12} \, dt$

6. Primitive por partes:

(a) $\displaystyle\int xe^{3x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int x^2e^x\,dx$

(c) $\displaystyle\int x\cdot\ln(x)\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx$

7. Calcule o seguinte integral e esboce a região plana cuja área calculou:

$$\int_0^2 \left(1-\frac{1}{2}x\right)\,dx$$

4.2 Resoluções propostas

1. (a) $\big[\,x\cdot(x^2-3)\,\big]'=\big[x^3-3x\,\big]'=3x^2-3$,
   logo $\displaystyle\int \big(\,3x^2-3\,\big)\;dx=x\cdot(x^2-3)\,+\,C$.

   (b) $\displaystyle\left(\frac{x}{x^2+3}\right)'=\frac{(x)'\cdot(x^2+3)-x\cdot(x^2+3)'}{(x^2+3)^2}=\frac{(x^2+3)-x\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{3-x^2}{(x^2+3)^2}$,
   logo $\displaystyle\int \frac{3-x^2}{(x^2+3)^2}\;dx=\frac{x}{x^2+3}\,+\,C$

   (c) $\displaystyle\left(\frac{1}{x^6}\right)'=\big(\,x^{-6}\,\big)'=\,-6x^{-7}$, logo $\displaystyle\int \big(\,-6x^{-7}\,\big)\;dx=\frac{1}{x^6}+C$

   (d) $\displaystyle\left(\sqrt{x^3+5}\right)'=\left((x^3+5)^{1/2}\right)'=\frac{1}{2}\cdot 3x^2\,(x^3+5)^{-1/2}=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+5}}$,
   logo $\displaystyle\int \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+5}}\;dx=\sqrt{x^3+5}\,+\,C$

2. (a) $\displaystyle\int x^4\,dx=\frac{x^5}{5}+C$

   (b) $\displaystyle\int x^{3/2}\,dx=\frac{x^{5/2}}{5/2}+C=\frac{2}{5}\,x^{5/2}+C$

   (c) $\displaystyle\int x\cdot\sqrt[3]{x}\,dx=\int x\cdot x^{1/3}\,dx=\int x^{4/3}\,dx=\frac{x^{7/3}}{7/3}+C=\frac{3}{7}\,x^{7/3}+C$

   (d) $\displaystyle\int \frac{1}{x^6}\,dx=\int x^{-6}\,dx=\frac{x^{-5}}{-5}+C=-\,\frac{1}{5}\,x^{-5}+C=-\,\frac{1}{5\,x^5}+C$

3. (a) $\displaystyle\int \frac{1}{2x^3}\,dx=\int\left(\frac{1}{2}\,x^{-3}\right)dx=\frac{1}{2}\cdot\int x^{-3}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{-2}}{-2}+C=-\,\frac{1}{4x^2}+C$

   (b) $\displaystyle\int(x^3-2x+5)\,dx=\int x^3\,dx\;-\;\int 2x\,dx\;+\;\int 5\,dx=\frac{x^4}{4}-x^2+5x+C$

   (c)

$$\begin{aligned}\int(x^{-3}+\sqrt{x}-3x^{1/4}+x^2)\,dx &= \frac{x^{-2}}{-2}+\frac{x^{3/2}}{3/2}-3\cdot\frac{x^{5/4}}{5/4}+\frac{x^3}{3}+C\\ &= -\,\frac{1}{2x^2}+\frac{2}{3}\,x^{3/2}-\frac{12}{5}\,x^{5/4}+\frac{1}{3}\,x^3+C\end{aligned}$$

(d) $\displaystyle\int x(1+x^3)\,dx = \int (x+x^4)\,dx = \frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{5}+C$

4. (a) $\displaystyle\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{x} \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = \int x^{1/3}\,dx = \frac{x^{4/3}}{4/3}+C = \frac{3}{4}\,x^{4/3}+C\ .$

Usando a condição inicial: $y(1)=2 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{3}{4}\,(1)^{4/3}+C=2 \quad \Leftrightarrow$

$\dfrac{3}{4}+C=2 \quad \Leftrightarrow \quad C=\dfrac{5}{4}$, logo $y(x)=\dfrac{3}{4}\,x^{4/3}+\dfrac{5}{4}$.

(b) $\displaystyle\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{\sqrt{x}} \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = \int \left(\frac{x}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\,dx = \int \left(x^{1/2}+x^{-1/2}\right)\,dx \quad \Leftrightarrow$

$\displaystyle y(x) = \frac{x^{3/2}}{3/2}+\frac{x^{1/2}}{1/2}+C = \frac{2}{3}\,x^{3/2}+2\,x^{1/2}+C\ .$

Usando a condição inicial: $y(1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{2}{3}\,x^{3/2}+2\,x^{1/2}+C=0 \quad \Leftrightarrow$

$\dfrac{2}{3}+2+C=0 \quad \Leftrightarrow \quad C=-\dfrac{8}{3}$, logo $y(x)=\dfrac{2}{3}\,x^{3/2}+2\,x^{1/2}-\dfrac{8}{3}$.

5. (a) Cálculo auxiliar (substituição de variável):

$$y=x^4+1 \qquad ; \qquad \frac{dy}{dx}=4x^3 \quad \Leftrightarrow \quad dy=4x^3\,dx\ , \quad \text{logo} \ :$$

$$\int 2x^3(x^4+1)^{15}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int (\underbrace{x^4+1}_{y})^{15}\cdot\underbrace{2\cdot 2x^3\,dx}_{dy} = \frac{1}{2}\cdot\int y^{15}\,dy = \frac{1}{2}\cdot\frac{y^{16}}{16}+C =$$

$$= \frac{1}{32}\,y^{16}+C = \frac{1}{32}(x^4+1)^{16}+C\ .$$

(b) Cálculo auxiliar (substituição de variável):

$$y=4x^2+5 \qquad ; \qquad \frac{dy}{dx}=8x \quad \Leftrightarrow \quad dy=8x\,dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{8}\,dy=3x\,dx\ , \quad \text{logo} \ :$$

$$\int \frac{3x}{\sqrt{4x^2+5}}\,dx = \int (\underbrace{4x^2+5}_{y})^{-1/2}\cdot\underbrace{3x\,dx}_{\frac{3}{8}dy} = \int y^{-1/2}\cdot\frac{3}{8}\,dy = \frac{3}{8}\cdot\int y^{-1/2}\,dy =$$

$$= \frac{3}{8}\cdot\frac{y^{1/2}}{1/2}+C = \frac{3}{4}\,y^{1/2}+C = \frac{3}{4}\,(4x^2+5)^{1/2}+C = \frac{3}{4}\,\sqrt{4x^2+5}+C\ .$$

(c) Cálculo auxiliar (substituição de variável):

$$y=x-3 \quad \Leftrightarrow \quad x=y+3 \qquad ; \qquad \frac{dy}{dx}=1 \quad \Leftrightarrow \quad dy=dx\ , \quad \text{logo} \ :$$

$$\int \underbrace{x}_{y+3}\cdot\underbrace{\sqrt{x-3}}_{\sqrt{y}}\,\underbrace{dx}_{dy} = \int (y+3)\cdot y^{1/2}\,dy = \int (y^{3/2}+3y^{1/2})\,dy =$$

$$= \frac{y^{5/2}}{5/2}+3\cdot\frac{y^{3/2}}{3/2}+C = \frac{2}{5}\,y^{5/2}+2\,y^{3/2}+C = \frac{2}{5}\,(x-3)^{5/2}+2\,(x-3)^{3/2}+C$$

(d) Cálculo auxiliar (substituição de variável):

$$s = 7t^2 + 12 \qquad ; \qquad \frac{ds}{dt} = 14t \quad \Leftrightarrow \quad ds = 14t\ dt\ , \quad \text{logo}\ :$$

$$\int t\cdot\sqrt{7t^2+12}\ dt = \frac{1}{14}\cdot\int (\underbrace{7t^2+12}_{s})^{1/2}\cdot\underbrace{14t\ dt}_{ds} = \frac{1}{14}\cdot\int s^{1/2}\ ds = \frac{1}{14}\cdot\frac{s^{3/2}}{3/2}+C =$$

$$= \frac{1}{21}\cdot s^{3/2} + C = \frac{1}{21}\ (7t^2+12)^{3/2} + C$$

6. Fórmula de primitivação por partes:

$$\int u\cdot v' = u\cdot v - \int u'\cdot v$$

(a) Cálculo auxiliar:

$$u = x \quad , \quad v' = e^{3x} \qquad ; \qquad u' = 1 \quad , \quad v = \frac{e^{3x}}{3}$$

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{e^{3x}}_{v'}\ dx \ &= \ \underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{\frac{e^{3x}}{3}}_{v} - \int \underbrace{1}_{u'}\cdot\underbrace{\frac{e^{3x}}{3}}_{v}\ dx \\ &= \ \frac{1}{3}\ x\ e^{3x}\ - \ \frac{1}{3}\int e^{3x}\ dx \ = \ \frac{1}{3}\ x\ e^{3x} - \frac{1}{9}\ e^{3x} + C\ . \end{aligned}$$

(b) Cálculo auxiliar (1):

$$u = x^2 \quad , \quad v' = e^{x} \qquad ; \qquad u' = 2x \quad , \quad v = e^{x}$$

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x^2}_{u}\cdot\underbrace{e^{x}}_{v'}\ dx \ &= \ \underbrace{x^2}_{u}\cdot\underbrace{e^{x}}_{v} - \int \underbrace{2x}_{u'}\cdot\underbrace{e^{x}}_{v}\ dx \\ &= \ x^2\ e^x - 2\cdot\int x\cdot e^x\ dx\ . \end{aligned}$$

Iremos de fazer um segundo cálculo auxiliar (2):

$$\int \underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{e^{x}}_{v'}\ dx = \underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{e^{x}}_{v} - \int \underbrace{1}_{u'}\cdot\underbrace{e^{x}}_{v}\ dx = x\ e^x - e^x + C$$

e finalmente concluímos que:

$$\int x^2\ e^x\ dx = x^2\ e^x - 2\cdot\underbrace{(x\ e^x - e^x)}_{\int x\cdot e^x\ dx} + C = x^2\ e^x - 2x\ e^x + 2\ e^x + C$$

(c) Cálculo auxiliar:

$$u = \ln(x) \quad , \quad v' = x \qquad ; \qquad u' = \frac{1}{x} \quad , \quad v = \frac{x^2}{2}$$

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{\ln(x)}_{u} \cdot \underbrace{x}_{v'} \, dx &= \underbrace{\ln(x)}_{u} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v} - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v} \, dx \\
&= \ln(x) \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \int x \, dx = \frac{1}{2} \, x^2 \, \ln(x) - \frac{1}{4} x^2 + C
\end{aligned}$$

(d) Cálculo auxiliar:

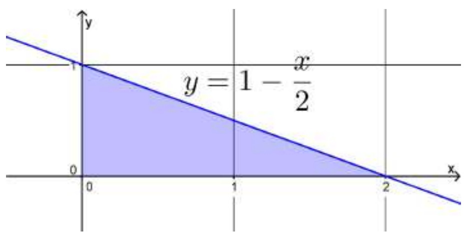
$$u = \ln(x) \quad , \quad v' = x^{-1/2} \qquad ; \qquad u' = \frac{1}{x} \quad , \quad v = \frac{x^{1/2}}{1/2} = 2x^{1/2}$$

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{\ln(x)}_{u} \cdot \underbrace{x^{-1/2}}_{v'} \, dx &= \underbrace{\ln(x)}_{u} \cdot \underbrace{2x^{1/2}}_{v} - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'} \cdot \underbrace{2x^{1/2}}_{v} \, dx \\
&= \ln(x) \cdot 2x^{1/2} - 2 \cdot \int x^{-1/2} \, dx = 2x^{1/2} \, \ln(x) - 4x^{1/2} + C
\end{aligned}$$

7. Cálculo auxiliar:

$$F(x) = \int \left(1 - \frac{1}{2}x\right) \, dx = x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C = x - \frac{x^2}{4} + C \; .$$

$$\int_0^2 \left(1 - \frac{1}{2} \, x\right) \, dx = \left[x - \frac{x^2}{4}\right]_0^2 = \left(2 - \frac{2^2}{4}\right) - \left(0 - \frac{0^2}{4}\right) = 2 - 1 = 1 \; .$$



Capítulo 5

Ficha 5

5.1 Exercícios: integrais e áreas

1. Calcule:

   (a) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x^2}\,dx$

   (b) $\displaystyle\int_4^9 2x\sqrt{x}\,dx$

   (c) $\displaystyle\int_0^2 |2x-3|\,dx$

   (d) $\displaystyle\int_1^2 x(1+x^3)\,dx$

2. Calcule a área da região plana sob a curva $y = x^2 + 1$ no intervalo $[0, 3]$. Esboce essa região.

3. Determine a área da região plana compreendida acima do eixo do x e abaixo da curva $y = (1-x)(x-2)$. Esboce essa região.

4. Esboce o conjunto

   $$A = \left\{ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \quad x^2 - 1 \le y \le -x + 1 \ \right\}$$

   e calcule a sua área através de um integral.

5. Considere $f(t) = 6t^2 + 2t$.

   (a) Calcule

   $$\int f(t)\,dt$$

   (b) Calcule

   $$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

   (c) Calcule

   $$\frac{d}{dx}\left[\int_0^x f(t)\,dt\right] = \frac{d}{dx}\left[F(x)\right]$$

6. Seja f uma função ímpar. Prove que:

   $$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

7. Seja f uma função par. Prove que:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

5.2 Resoluções propostas

1. (a) Cálculo auxiliar:

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

Logo, pelo T.F.C.:

$$\int_1^3 \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^3 = \left(-\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{1}\right) = \frac{2}{3}$$

(b) Cálculo auxiliar:

$$\int 2x\sqrt{x}\,dx = 2\int x^{3/2}\,dx = 2\,\frac{x^{5/2}}{5/2} + C = \frac{4}{5}x^{5/2} + C$$

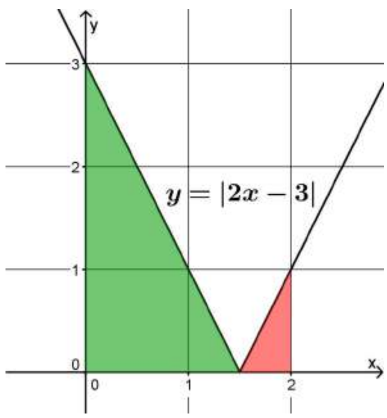
Logo, pelo T.F.C.:

$$\int_4^9 2x\sqrt{x}\,dx = \left[\frac{4}{5}x^{5/2}\right]_4^9 = \left(\frac{4}{5}\cdot 9^{5/2}\right) - \left(\frac{4}{5}\cdot 4^{5/2}\right) = \frac{4}{5}\left(3^5 - 2^5\right)$$

(c) A função $|2x-3|$ só pode ser primitivada depois de a definirmos por ramos:

$$|2x-3| = \begin{cases} -(2x-3) & \text{se } 2x-3<0 \\ 2x-3 & \text{se } 2x-3\geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -2x+3 & \text{se } x<\dfrac{3}{2} \\ 2x-3 & \text{se } x\geq\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Assim, $$\int_0^2 |2x-3|\,dx = \int_0^{3/2}(-2x+3)\,dx + \int_{3/2}^{2}(2x-3)\,dx$$



Cálculos auxiliares:

$$\int_0^{3/2} (-2x+3)\,dx = \Big[-x^2+3x\Big]_0^{3/2} = \left(-\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3\cdot\frac{3}{2}\right) - \Big(0\Big) = \frac{9}{4}$$

$$\int_{3/2}^{2} (2x-3)\,dx = \Big[x^2-3x\Big]_{3/2}^{2} = \Big(2^2-3\cdot 2\Big) - \left(\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\cdot\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Logo:

$$\int_0^2 |2x-3|\,dx = \frac{9}{4}+\frac{1}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

(d) Cálculo auxiliar:

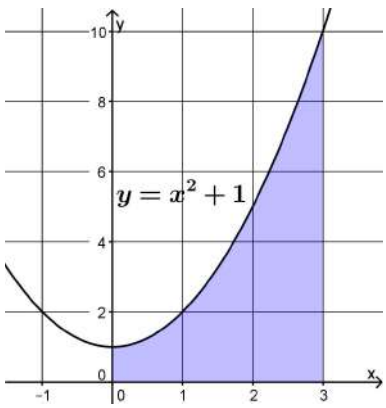
$$\int x(1+x^3)\,dx = \int (x+x^4)\,dx = \frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{5}+C$$

Logo, pelo T.F.C.:

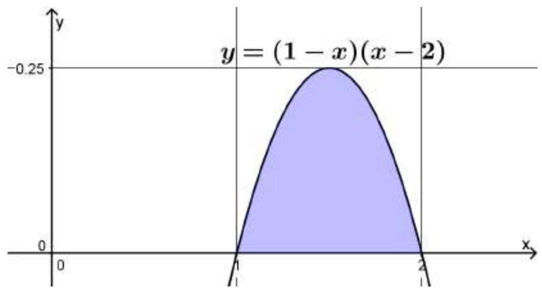
$$\int_1^2 x(1+x^3)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{5}\right]_1^2 = \left(\frac{2^2}{2}+\frac{2^5}{5}\right) - \left(\frac{1^2}{2}+\frac{1^5}{5}\right) = \frac{77}{10}$$

2. Como $y = x^2+1$ é uma função não negativa, a área pedida calcula-se através de:

$$\int_0^3 (x^2+1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^3 = \left(\frac{3^3}{3}+3\right) - \Big(0\Big) = 12$$



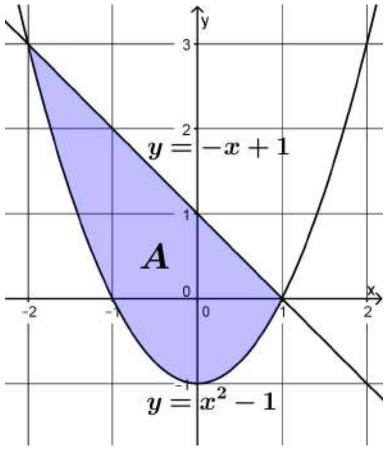
3. O conjunto definido por $0 \le y \le (1-x)(x-2) \Leftrightarrow 0 \le y \le -x^2+3x-2$ é:



e a sua área calcula-se através de:

$$\int_1^2 (-x^2+3x-2)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3}+3\cdot\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^2 = \left(-\frac{2^3}{3}+3\cdot\frac{2^2}{2}-2\cdot 2\right)-\left(-\frac{1^3}{3}+3\cdot\frac{1^2}{2}-2\cdot 1\right) = \frac{1}{6}$$

4.



$$A = \int_{-2}^{1} \Big((-x+1) \ - \ (x^2-1) \Big)\, dx = \int_{-2}^{1} \Big(-x^2-x+2 \Big)\, dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^{1} = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 2 \right) - \left(-\frac{(-2)^3}{2} - \frac{(-2)^2}{2} - 4 \right) = 11$$

5. (a)

$$\int f(t)\, dt = \int \big(6t^2 + 2t \big)\, dt = 6\cdot\frac{t^3}{3} + 2\cdot\frac{t^2}{2} + C = 2t^3 + t^2 + C$$

(b) Pelo T.F.C.:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt = \Big[2t^3+t^2\Big]_0^x = \Big(2x^3+x^2\Big) - \Big(\ 0\ \Big) = 2x^3+x^2$$

(c)

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^x f(t)\, dt\right] = \frac{d}{dx}\left[2x^3+x^2\right] = 6x^2+2x = f(x)$$

6. Cálculo auxiliar, com mudança de variável $x=-y$ e $dx=(-1)\,dy$:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_a^0 f(-y)\cdot(-1)\,dy = -\int_a^0 f(-y)\,dy = \int_0^a f(-y)\,dy$$

Mas como f é ímpar, então $f(-y) = -f(y)$, logo:

$$\int_0^a f(-y)\,dy = -\int_0^a f(y)dy = -\int_0^a f(x)\,dx$$

Finalmente:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = -\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 0$$

7. O raciocínio é idêntico ao da pergunta anterior, com a seguinte diferença: se f é par, então $f(-y) = f(y)$. Assim,:

$$\int_0^a f(-y)\, dy = \int_0^a f(y) dy = \int_0^a f(x)\, dx$$

logo:

$$\int_{-a}^a f(x)\, dx = \int_{-a}^0 f(x)\, dx + \int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a f(x)\, dx + \int_0^a f(x)\, dx = 2 \int_0^a f(x)\, dx$$

Capítulo 6

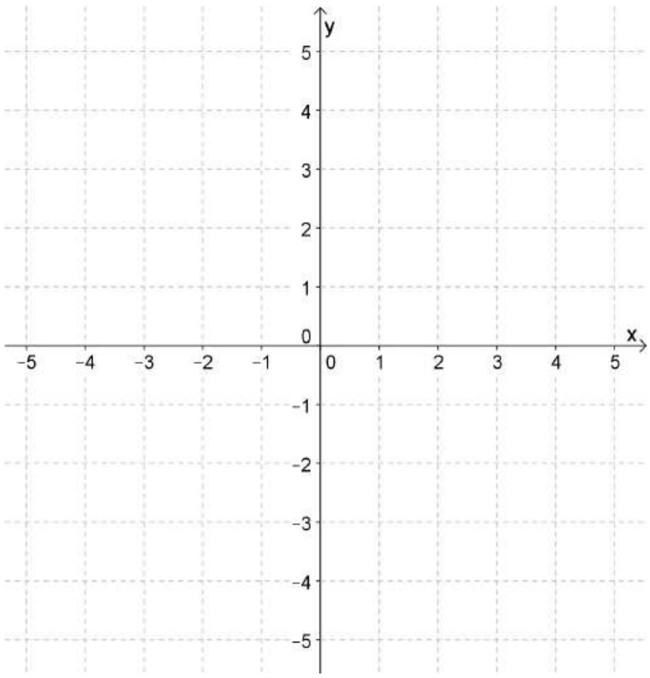
Teste 1, de 4 de Novembro de 2013

6.1 Enunciado

1. Considere $f(x) = 3x - 2$.

   (a) Complete a tabela e esboce o gráfico $y = f(x)$:

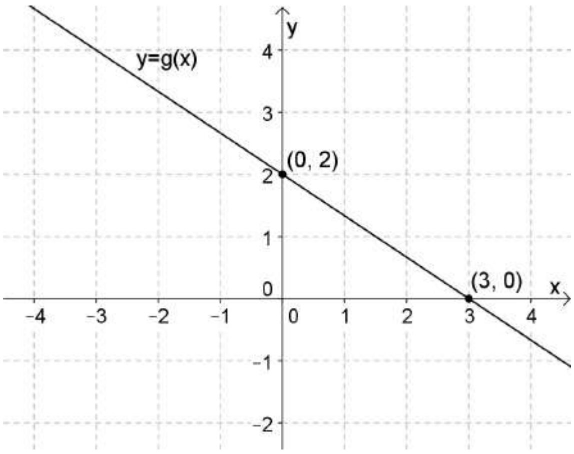
x	$y = f(x)$
-1	
0	
1	
2	



   (b) Determine o(s) zero(s) da função f e resolva $f(x) \geq 0$.

   (c) Defina a equação da recta paralela a $y = f(x)$ e que contém o ponto $(-2; -1)$.

2. Considere a seguinte recta:



(a) Determine o declive e a equação reduzida $\left(m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x},\ y = mx + b\right)$ desta recta.

(b) Resolva algebricamente:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ -\dfrac{2}{3}x + y = 0 \end{cases}$$

(c) Represente a tracejado a região do plano que satisfaz:

$$2x + 3y > 6 \quad \wedge \quad -\frac{2}{3}x + y > 0$$

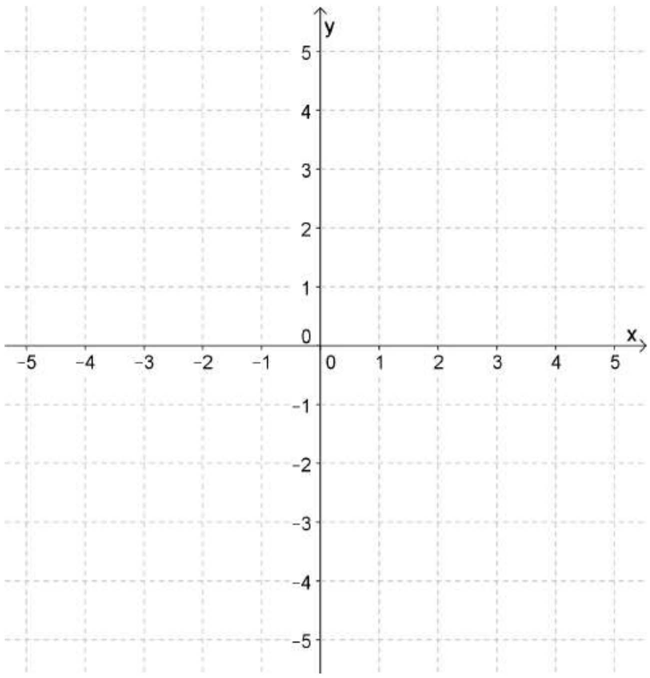
3. Considere $h(x) = x^2 - 2x - 3$.

(a) Determine os zeros de h e escreva $h(x)$ na forma factorizada.

$$\left(ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad ; \quad V_x = \frac{-b}{2a}\right)$$

(b) Determine o vértice $(V_x; V_y)$, complete a tabela e esboce o gráfico $y = h(x)$:

x	$y = h(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	



(c) Determine o conjunto-solução de $h(x) \geq 0$.

4. Considere um depósito a prazo com composição anual de juros à taxa anual de 15%.
Quantos anos serão necessários para um depósito inicial de 100 euros aumentar 45% ?
Apresente a resposta como uma expressão algébrica, sem calculá-la.

$$\left(\qquad C(t) = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t \qquad \right)$$

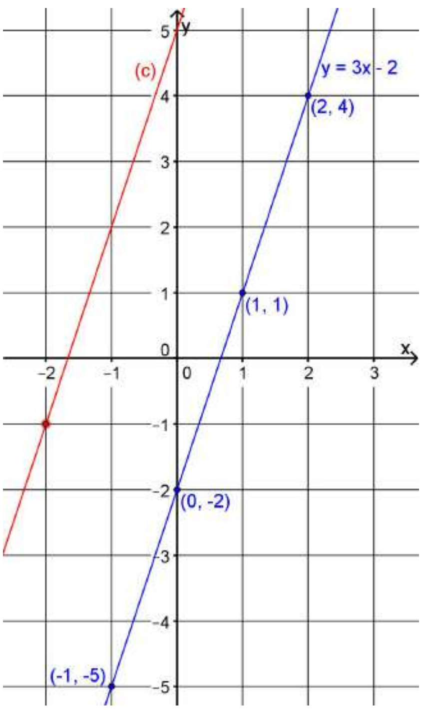
5. Para cada $n \in \mathbb{N}$, mostre que:

$$-\log_n \left(\log_n \sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}} \right) = 3$$

6.2 Resolução proposta

1. (a)

x	$y = f(x)$
-1	$3 \times (-1) - 2 = -5$
0	$3 \times (0) - 2 = -2$
1	$3 \times (1) - 2 = 1$
2	$3 \times (2) - 2 = 4$



(b) Os zeros de f são as soluções de:

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2}{3}$$

A resolução da inequação é:

$$f(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x-2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left[\frac{2}{3}, +\infty\right[$$

(c) Sendo a recta paralela, terá o mesmo declive: $m = 3$.
Aplicando a equação da recta na forma ponto-declive:

$$y - (-1) = 3\Big(x - (-2)\Big) \quad \Leftrightarrow \quad y + 1 = 3(x+2) \quad \Leftrightarrow \quad y = 3x + 5$$

2. (a)

$$b = 2 \;;\; m = \frac{0-2}{3-0} \;=\; -\frac{2}{3} \;;\; \text{logo } y = -\frac{2}{3}x + 2$$

(b)

$$\begin{cases} 2x + 3y &= 6 \\ -\frac{2}{3}x + \;\; y &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y &= 6 \\ y &= \frac{2}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3 \cdot \frac{2}{3}x &= 6 \\ y &= \frac{2}{3}x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x &= 6 \\ y &= \frac{2}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= \frac{3}{2} \\ y &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= \frac{3}{2} \\ y &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y) = \left(\frac{3}{2};1\right)$$

(c)

$$2x + 3y > 6 \;\wedge\; -\frac{2}{3}x + y > 0 \quad \Leftrightarrow \quad y > -\frac{2}{3}x + 2 \;\wedge\; y > \frac{2}{3}x$$

3. (a) Os zeros de h são as soluções de:

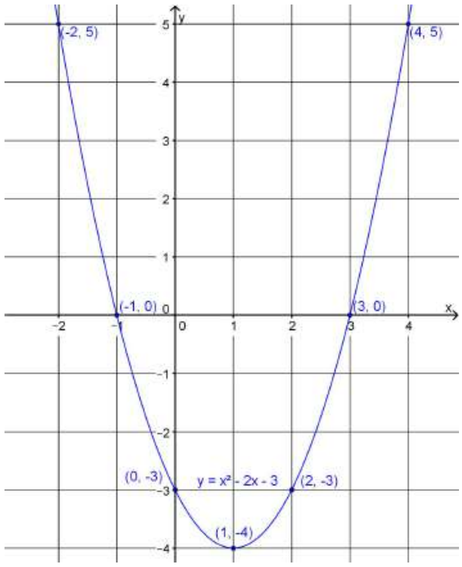
$$h(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{2 \pm 4}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \;\vee\; x = 3$$

A forma factorizada é: $h(x) = (x - (-1))(x-3) = (x+1)(x-3)$.

(b) $V_x = \dfrac{-(-2)}{2 \cdot 1} = 1$ e $V_y = h(1) = (1)^2 - 2 \cdot (1) - 3 = -4$, logo $(V_x; V_y) = (1; -4)$.

x	$y = x^2 - 2x - 3$
-2	$(-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 3 = 5$
-1	$(-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 3 = 0$
0	$(0)^2 - 2 \cdot (0) - 3 = -3$
1	$(1)^2 - 2 \cdot (1) - 3 = -4$
2	$(2)^2 - 2 \cdot (2) - 3 = -3$
3	$(3)^2 - 2 \cdot (3) - 3 = 0$
4	$(4)^2 - 2 \cdot (4) - 3 = 5$



(c)

$$
\begin{aligned}
h(x) \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 3 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)(x-3) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -1 \;\vee\; x \geq 3 \\
&\Leftrightarrow \quad C.S. = \,]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[
\end{aligned}
$$

4.

$$
145 = 100 \cdot \left(1 + \frac{15}{100}\right)^t \quad \Leftrightarrow \quad 1,15^t = 1,45 \quad \Leftrightarrow \quad t = \log_{1,15} 1,45 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{\ln 1,45}{\ln 1,15}
$$

5. Cálculo auxiliar:

$$
\sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}} = \left[\left(n^{1/n}\right)^{1/n}\right]^{1/n} = n^{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}} = n^{(1/n^3)}
$$

Logo:

$$
\begin{aligned}
-\log_n \left(\log_n \sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}}\right) \quad &= \quad -\log_n \left(\log_n n^{(1/n^3)}\right) = -\log_n \left(\frac{1}{n^3} \log_n n\right) = \\
&= \quad -\log_n \left(\frac{1}{n^3}\right) = -\log_n \left(n^{-3}\right) = -(-3) \log_n n = 3
\end{aligned}
$$

Capítulo 7

Teste 2, de 5 de Dezembro de 2013

7.1 Enunciado

1. Calcule:

   (a)
   $$\frac{d}{dx}\left(\frac{2x^4+4x^2-6x}{2x^2} \right)$$

   (b)
   $$\frac{d}{dx}\left(\left(3x+e^{7x} \right)^5 \right)$$

   (c)
   $$\frac{d}{dx}\left((2x+1)^4 \cdot \sqrt{x-1} \right)$$

2. Considere:
   $$f(x)=\frac{x^3}{3}-9x+2$$

   (a) Determine os pontos de estacionariedade de f.

   (b) Defina os intervalos de monotonia e calcule os extremos locais de f.

   (c) A restrição de f ao intervalo $[0,4]$ tem extremos absolutos.
   Explique porquê e determine-os.

3. Sejam

$$f(u) = \ln(\,\ln u\,) \quad \text{e} \quad g(x) = x^2 - 1$$

(a) Determine o domínio de f e calcule $f'(u)$.

(b) Calcule $(f \circ g)(x)$ e determine o seu domínio (recorde que $(f \circ g)(x) = f[\,g(x)\,]$).

(c) Use a regra da cadeia, $(f \circ g)'(x) = f'[\,g(x)\,] \cdot g'(x)$, para calcular $(f \circ g)'(x)$.

4. Sejam

$$f(x) = x^{2/3}, \quad a = -1 \quad \text{e} \quad b = 8$$

(a) Prove que não existe $c \in]a, b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(b) Explique por que razão a proposição da alínea anterior não contradiz o Teorema do Valor Médio de Lagrange.

5. Determine a e b (em função de $c > 0$) de forma a que $f'(c)$ exista:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|} & , \text{ se } |x| > c, \\ a + bx^2 & , \text{ se } |x| \leq c \end{cases}$$

Sugestão: considere as condições para haver continuidade e diferenciabilidade em $x = c$.

7.2 Resolução proposta

1. (a)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2x^4 + 4x^2 - 6x}{2x^2} \right) = \left(\frac{2x^4}{2x^2} + \frac{4x^2}{2x^2} - \frac{6x}{2x^2} \right)' = \left(x^2 + 2 - 3x^{-1}\right)' = 2x + 3x^{-2}\ .$$

(b)

$$\frac{d}{dx}\left(\left(\,3x + e^{7x}\,\right)^5 \right) = 5\,\left(\,3x + e^{7x}\,\right)^4\,\left(\,3x + e^{7x}\,\right)' = 5\,\left(\,3x + e^{7x}\,\right)^4\,\left(\,3 + 7e^{7x}\,\right)\ .$$

(c)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left((2x+1)^4 \cdot \sqrt{x-1} \right) &= \left[(2x+1)^4\right]' \cdot \sqrt{x-1} + (2x+1)^4 \cdot \left[(x-1)^{1/2}\right]' \\
&= 4\,(2x+1)^3 \cdot 2 \cdot \sqrt{x-1} + (2x+1)^4 \cdot \frac{1}{2}(x-1)^{-1/2} \\
&= 8\,(2x+1)^3 \cdot \sqrt{x-1} + \frac{(2x+1)^4}{2 \cdot \sqrt{x-1}} \; .
\end{aligned}$$

2. Seja

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 9x + 2$$

(a) Os pontos de estacionariedade de f são as soluções de $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}\,x^3 - 9x + 2 \right)' = \frac{1}{3} \cdot 3\,x^2 - 9 = x^2 - 9 \; .$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{9} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 3 \; .$$

Assim, os pontos de estacionariedade de f são $\{-3, 3\}$.

(b) Para estudar a monotonia e os extremos locais, construímos a seguinte tabela:

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	máx.	$\searrow$	mín.	$\nearrow$	

Concluímos que f é crescente em $]-\infty, -3]$ e em $[3, +\infty[$ e decrescente em $[-3, 3]$. f tem um máximo local $f(-3) = 20$ e um mínimo local $f(3) = -16$.

(c) O *Teorema do Valor Extremo* afirma que uma função contínua num intervalo fechado tem máximo e mínimo absoluto.
f é contínua em $\mathbb{R}$ (polinómio), logo tem máximo e mínimo absoluto em $[0, 4]$.
Considerando $f(3) = -16$ (mínimo local), $f(0) = 2$ e $f(4) = -12 - \frac{2}{3}$, concluímos que a restrição de f a $[0, 4]$ tem máximo absoluto $f(0) = 2$ e mínimo absoluto $f(3) = -16$.

Gráfico de $y = \dfrac{x^3}{3} - 9x + 2$

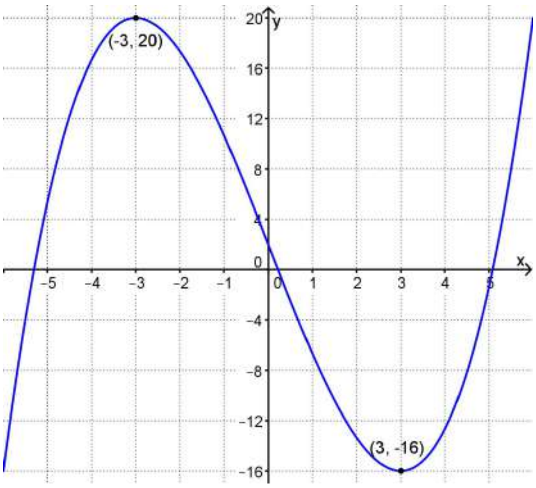
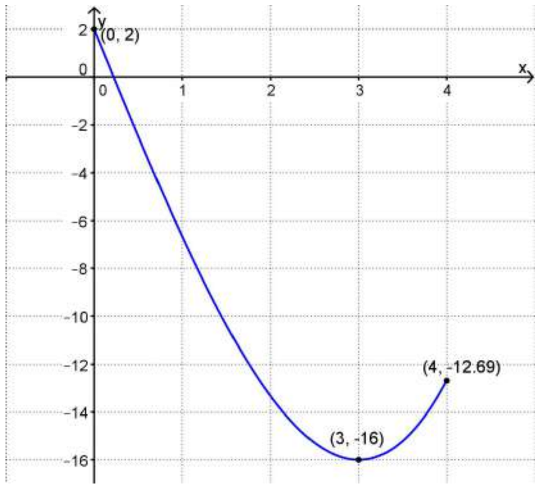


Gráfico da restrição de $f(x)$ a $[0, 4]$



3. (a) Seja $f(u) = \ln(\ \ln u\ )$. O seu domínio é:

$$D_f = \{\ u \in \mathbb{R}\ \mid\ u > 0\ \ \wedge\ \ \ln u > 0\ \} =]1, +\infty[\ ,$$

uma vez que $u > 0\ \wedge\ \ln u > 0 \quad \Leftrightarrow \quad u > 0\ \wedge\ u > 1 \quad \Leftrightarrow \quad u > 1.$
A sua derivada é:

$$f'(u) = \Big[\ln(\ \ln u\ )\Big]' = \frac{(\ \ln u\ )'}{\ln u} = \frac{\frac{1}{u}}{\ln u} = \frac{1}{u\ \ln u}$$

(b) Seja $g(x) = x^2 - 1$.

$$(f \circ g)(x) = f[\,g(x)\,] = f[\ x^2 - 1\ ] = \ln[\ \ln(\ x^2 - 1\ )\ ]$$

e o seu domínio é:

$$D_{f \circ g} = \{\ x \in \mathbb{R}\ \mid\ x^2 - 1 > 0\ \ \wedge\ \ \ln(\ x^2 - 1\ ) > 0\ \}\ .$$

Resolvendo:

$$x^2 - 1 > 0\ \ \wedge\ \ \ln(\ x^2 - 1\ ) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 1 > 0\ \ \wedge\ \ x^2 - 1 > 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 > 1\ \ \wedge\ \ x^2 > 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 > 2 \quad \Leftrightarrow \quad x < -\sqrt{2}\ \ \vee\ \ x > \sqrt{2}\ ,$$

concluímos que $D_{f \circ g} =]-\infty, -\sqrt{2}\,[\ \cup\ ]\,\sqrt{2}, +\infty[\ .$

(c) Sabemos que $f'(u) = \dfrac{1}{u\ \ln u}$ (alínea a)) e que $g'(x) = 2x$. Pela regra da cadeia:

$$(f \circ g)'(x) = f'[\,g(x)\,] \cdot g'(x) \ = \ f'[x^2 - 1] \cdot 2x \ = \frac{2x}{(x^2 - 1)\ \ln(x^2 - 1)}$$

4. (a) Sejam:

$$f(x) = x^{2/3} \quad ; \quad f'(x) = \frac{2}{3}\, x^{-1/3} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} \,.$$

$$\begin{aligned} \frac{f(8) - f(-1)}{8 - (-1)} &= \frac{8^{2/3} - (-1)^{2/3}}{9} = \frac{[8^{1/3}]^2 - [(-1)^{1/3}]^2}{9} \\ &= \frac{[2]^2 - [-1]^2}{9} = \frac{4-1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \,. \end{aligned}$$

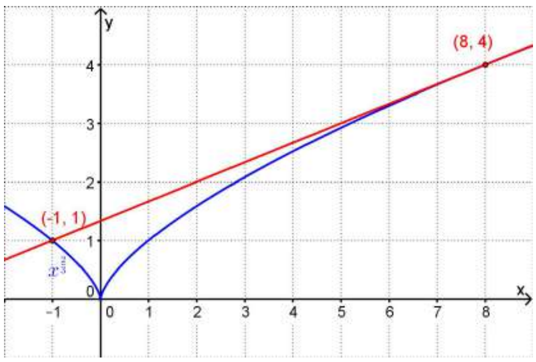
Então:

$$f'(c) = \frac{f(8) - f(-1)}{8 - (-1)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{c}} = \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[3]{c} = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad c = 2^3 \quad \Leftrightarrow \quad c = 8 \,.$$

Mas $8 \notin]-1, 8[$, como queríamos demonstrar.

(b) A função f não tem derivada em $x = 0$, pois $f'(0)$ não existe.
$\left(f'(x) = \dfrac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}\right.$ não está definida em $\left.x = 0\right)$



Se f não é diferenciável em$]-1, 8[$, não estão reunidas as condições para aplicar o *Teorema do Valor Médio de Lagrange*.

5. Como $c > 0$, basta considerar $f(x)$ para $x > 0$:

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^2 & , \text{ se } 0 < x \leq c \\ \dfrac{1}{x} & , \text{ se } c < x \end{cases}$$

A condição de continuidade em $x = c$ será: $a + bc^2 = \lim\limits_{x \to c^+} \dfrac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad a + bc^2 = \dfrac{1}{c}$.
As derivadas de cada um dos ramos de f são:

$$\frac{d}{dx}\left(a + bx^2\right) = 2bx \quad ; \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} \,.$$

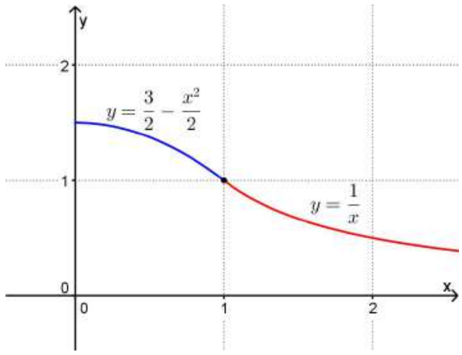
A condição de diferenciabilidade em $x = c$ será $2bc = -\dfrac{1}{c^2}$.
Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} a + bc^2 = \dfrac{1}{c} \\ 2bc = -\dfrac{1}{c^2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = \dfrac{1}{c} - bc^2 \\ b = -\dfrac{1}{2c^3} \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = \dfrac{1}{c} + \dfrac{c^2}{2c^3} \\ b = -\dfrac{1}{2c^3} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = \dfrac{3}{2c} \\ b = -\dfrac{1}{2c^3} \end{cases}$$

Exemplo com $c = 1$, logo $a = \dfrac{3}{2}$ e $b = -\dfrac{1}{2}$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}x^2 & \text{, se } 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{, se } 1 < x \end{cases}$$



Capítulo 8

Teste 3, de 24 de Janeiro de 2014

8.1 Enunciado

1. (a) Calcule:

$$\int \left(\frac{2}{x^3} - x \cdot \sqrt{x} + 2x^4 \right) dx$$

   (b) Seja $F(x)$ uma função (com domínio $\mathbb{R}^+$), tal que:

$$F'(x) = \frac{2}{x^3} - x \cdot \sqrt{x} + 2x^4 \quad \texttt{e} \quad F(1) = 3 \, .$$

   Determine $F(x)$.

2. (a) Use o método de primitivação por substituição de variável para calcular:

$$\int (x^3 - 1)^8 \cdot 9x^2 \, dx$$

   (Nota: apresente explicitamente a nova variável e os respectivos cálculos)

   (b) Calcule:

$$\int_0^1 (x^3 - 1)^8 \cdot 9x^2 \, dx$$

3. Use o método de primitivação por partes $\left(\int u\,v' \, dx = u\,v - \int u'\,v \, dx \right)$ para calcular:

   (a) $\displaystyle\int x \cdot e^{-3x} \, dx$

   (b) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2} \, dx$

4. (a) Esboce o seguinte conjunto:

$$A = \{ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x-1| \ \leq \ y \ \leq \ 2 \ - \ (x-1)^2 \ \}$$

(b) Calcule a área de A.

(Nota: se não resolveu a alínea a), calcule $\displaystyle\int_{-1}^{2} |1-x^2| \, dx$).

5. Seja $f(x)$ uma função ímpar e contínua em $\mathbb{R}$. Prove que:

(a)

$$F(x) = \int_0^x f(t) \, dt \quad \text{é uma função par.}$$

(b)

$$\frac{d}{dx} \int_{-x}^{x} f(t) \, dt = 0 \quad , \text{ para todo o } x \in \mathbb{R}.$$

Nas alíneas anteriores, justifique cuidadosamente todos os passos.

8.2 Resolução proposta

1. (a)

$$\int \left(\frac{2}{x^3} - x \cdot \sqrt{x} + 2x^4 \right) dx = \int \left(\, 2x^{-3} - x^{3/2} + 2x^4 \, \right) dx =$$

$$= 2 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} \ - \ \frac{x^{5/2}}{5/2} \ + \ 2 \cdot \frac{x^5}{5} \ + \ C = -x^{-2} \ - \ \frac{2}{5} \, x^{5/2} \ + \ \frac{2}{5} \, x^5 \ + \ C$$

(b) $F(x) = -x^{-2} \ - \ \dfrac{2}{5} \, x^{5/2} \ + \ \dfrac{2}{5} \, x^5 \ + \ C$, onde C é determinado pela condição:

$$F(1) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \ - \ \frac{2}{5} \ + \ \frac{2}{5} \ + \ C = 3 \quad \Leftrightarrow \quad C = 4.$$

2. (a) Façamos $y = x^3 - 1$ e $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 \quad \Leftrightarrow \quad dy = 3x^2 dx.$

$$\int (x^3-1)^8 \cdot 9x^2 \, dx = 3 \cdot \int (\underbrace{x^3-1}_{y})^8 \cdot \underbrace{3x^2 \, dx}_{dy} = 3 \cdot \int y^8 \, dy =$$

$$= 3 \cdot \frac{y^9}{9} + C = \frac{1}{3}(x^3-1)^9 + C$$

(b)

$$\int_0^1 (x^3-1)^8 \cdot 9x^2 \, dx = \left[\frac{1}{3}(x^3-1)^9 \right]_0^1 = \frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{1}{3}(-1)^9 = \frac{1}{3}$$

3. Fórmula de primitivação por partes: $\displaystyle\int u\, v'\, dx = u\, v - \int u'\, v\, dx$

(a) $u = x$, $u' = 1$, $v' = e^{-3x}$, $v = \dfrac{e^{-3x}}{-3}$.

$$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^{-3x}}_{v'}\, dx = \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\frac{e^{-3x}}{-3}}_{v} - \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\frac{e^{-3x}}{-3}}_{v}\, dx = -\frac{1}{3}\, x\, e^{-3x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{e^{-3x}}{-3} + C$$

(b) $u = \ln(x)$, $u' = \dfrac{1}{x}$, $v' = x^{-2}$, $v = -x^{-1}$.

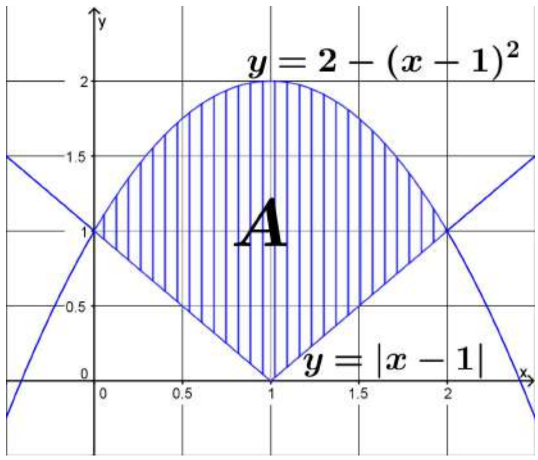
$$\int \underbrace{\ln(x)}_{u} \cdot \underbrace{x^{-2}}_{v'}\, dx = \underbrace{\ln(x)}_{u} \cdot \underbrace{(-x^{-1})}_{v} - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'} \cdot \underbrace{(-x^{-1})}_{v}\, dx =$$

$$= -\ln(x) \cdot x^{-1} + \int x^{-2}\, dx = -\ln(x) \cdot x^{-1} - x^{-1} + C = -\frac{1}{x}\Big(\ln(x) + 1\Big) + C$$

$$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x}\Big(\ln(x) + 1\Big)\right]_1^e = \left[\frac{1}{x}\Big(\ln(x) + 1\Big)\right]_e^1 = 1 - \frac{2}{e} = \frac{e-2}{e}$$

4. (a)

$$A = \{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ |x - 1|\ \leq\ y\ \leq\ 2\ -\ (x - 1)^2\ \}$$



(b) A área de A é:

$$\int_0^1 \Big[\underbrace{2 - (x-1)^2}_{f(x)} - \underbrace{(1 - x)}_{g(x)}\Big]\, dx\ +\ \int_1^2 \Big[\underbrace{2 - (x-1)^2}_{f(x)} - \underbrace{(-1 + x)}_{g(x)}\Big]\, dx$$

Contudo, dada a simetria da figura, os dois integrais são iguais, e a área será:

$$2 \cdot \int_0^1 \Big[2 - (x-1)^2 - (1 - x)\Big]\, dx = 2 \cdot \int_0^1 \Big(-x^2 + 3x\Big)\, dx =$$

$$= 2 \cdot \left[-\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{2}\right) = 2 \cdot \frac{7}{6} = \frac{7}{3}$$

5. (a) Fazendo uma mudança de variável $s = -t \quad \Leftrightarrow \quad t = -s, \ \dfrac{dt}{ds} = -1 \quad \Leftrightarrow$ $dt = (-1)\, ds$:

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)\, dt \ = \int_0^{x} f(\underbrace{-s}_{t}) \cdot \underbrace{(-1)\, ds}_{dt} \ = \int_0^{x} -f(-s)\, ds =$$

mas como f é ímpar, $-f(-s) = f(s)$, teremos:

$$= \int_0^{x} f(s)\, ds = F(x)\ ,$$

ficando assim provado que $F(x)$ é par.

(b) Como f é contínua, f é integrável e

$$\int_{-x}^{x} f(t)\, dt = F(x) - F(-x) = 0, \text{ porque } F \text{ é par.}$$

Logo

$$\frac{d}{dx}\int_{-x}^{x} f(t)\, dt = \frac{d}{dx}\ (\ 0\ ) = 0.$$

Capítulo 9

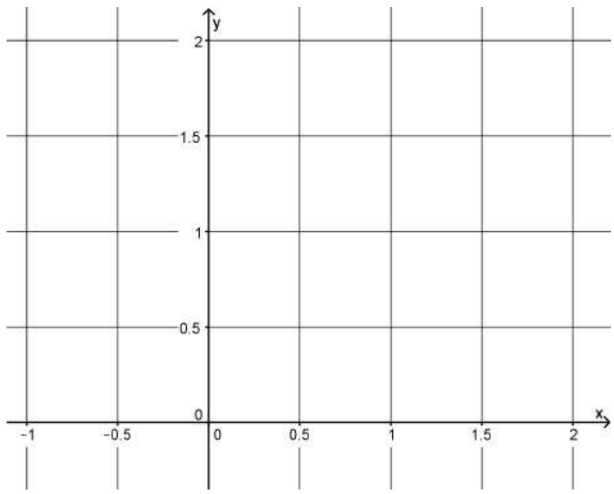
Exame Final, de 6 de Fevereiro de 2014

9.1 Enunciado

1. Seja $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + 1$.

   (a) Complete a tabela e esboce o gráfico $y = f(x)$:

x	$y = f(x)$
-1	
0	
1	
2	

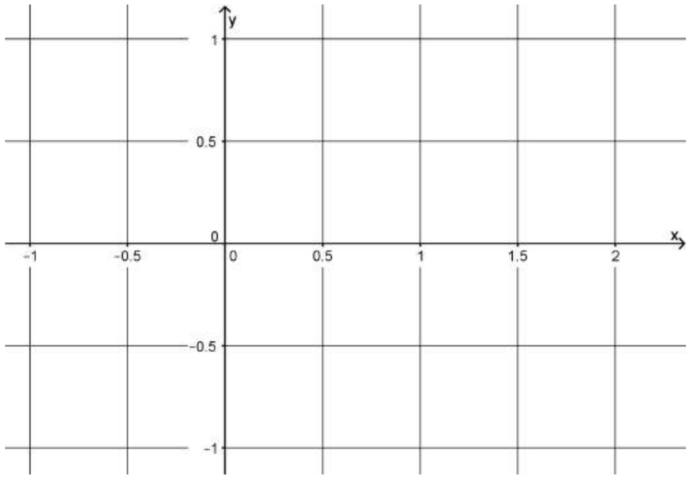


   (b) Esboce a recta que passa pelos pontos $(x_1; y_1) = (-\dfrac{1}{2}; 0)$ e $(x_2; y_2) = (0; 1)$ e determine a sua equação reduzida.

2. (a) Resolva algebricamente:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

   (b) Esboce (a tracejado) o conjunto: $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 - 2x + 1 \leq y \leq x - 1\right\}$.



3. Calcule:

   (a)
$$\frac{d}{dx}\left[\,\frac{4x^3+8x-3}{2x}\,\right]$$

   (b)
$$\frac{d}{dx}\left[\,x^2\cdot(x^5-e^{2x})^4\,\right]$$

4. Sejam
$$f(u)=\frac{e^u}{1-e^u} \quad \text{e} \quad g(x)=\sqrt{x}$$

   (a) Defina $(f\circ g)(x)$ e determine o seu domínio.

   (b) Use a regra da cadeia, $(f\circ g)'(x)=f'[\,g(x)\,]\cdot g'(x)$, para calcular $(f\circ g)'(x)$.

5. Calcule cada integral e esboce o conjunto cuja área calculou:

   (a)
$$\int_1^4 (\sqrt{x}+1)\;dx$$

   (b)
$$\int_{-1}^2 |x-1|\;dx$$

6. Calcule:

   (a)
$$\int x\cdot\sqrt{x-1}\;dx$$

   (b)
$$\int x^2\cdot\ln(x)\,dx$$

7. Seja f uma função contínua, tal que

$$\int_0^x f(t)\,dt = xe^{2x} + \int_0^x e^{-t} f(t)\,dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

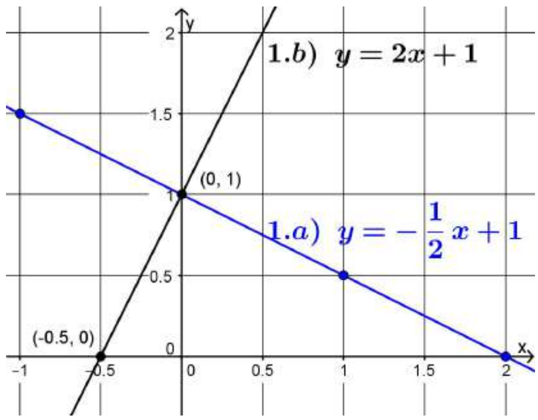
Determine uma fórmula explícita para $f(x)$.

9.2 Resolução proposta

1. Seja $f(x) = -\dfrac{1}{2}\,x + 1$.

   (a) Eis a tabela auxiliar e o gráfico da recta $y = -\dfrac{1}{2}x + 1$:

x	$y = f(x)$
-1	$-\frac{1}{2}(-1) + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$
0	$-\frac{1}{2}(0) + 1 = 1$
1	$-\frac{1}{2}(1) + 1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$
2	$-\frac{1}{2}(2) + 1 = -1 + 1 = 0$



Observação: a recta tem declive $m = -\dfrac{1}{2}$ e ordenada na origem $b = 1$.

   (b) O esboço desta recta está feito no mesmo sistema de eixos da alínea anterior. Como $(x_1; y_1) = (-\dfrac{1}{2}; 0)$ e $(x_2; y_2) = (0; 1)$ pertencem à recta, o seu declive é:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 0}{0 - (-\frac{1}{2})} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2\,.$$

$(x_2; y_2) = (0; 1)$ é a intersecção da recta com o eixo das ordenadas (y), logo $b = 1$.
Portanto, a equação reduzida da recta é: $y = 2x + 1$.

2. (a)

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = y \\ x - 1 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = x - 1 \\ x - 1 = y \end{cases}$$

Fazendo um cálculo auxiliar para a primeira equação:

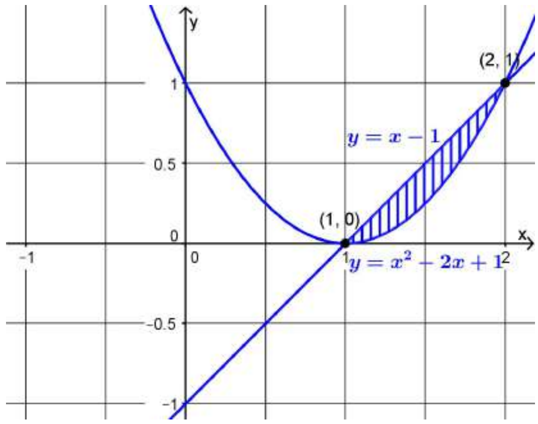
$$x^2 - 2x + 1 = x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3 \pm 1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \vee x = 2$$

Retornando ao sistema, teremos então;

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \vee x = 2 \\ y = x - 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} .$$

(b) O conjunto: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 - 2x + 1 \leq y \leq x - 1\}$ está definido na forma $g(x) \leq y \leq f(x)$, portanto basta esboçar os gráficos $y = f(x)$, $y = g(x)$ e assinalar a região compreendida simultaneamente abaixo do gráfico de f e acima do gráfico de g.
$y = x - 1$ define a recta com declive $m = 1$ e $b = -1$.
$y = x^2 - 2x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = (x-1)^2$ define uma parábola com vértice em $(1, 0)$, que é uma translação da parábola $y = x^2$ pelo vector $\vec{v} = (1, 0)$.
A recta e a parábola intersectam-se em dois pontos, cujas coordenadas são as soluções do sistema de equações precedente.



3. (a)

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{4x^3 + 8x - 3}{2x}\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{4x^3}{2x} + \frac{8x}{2x} - \frac{3}{2x}\right] = \frac{d}{dx}\left[2x^2 + 4 - \frac{3}{2}x^{-1}\right] = 4x + \frac{3}{2}x^{-2}$$

(b)

$$\frac{d}{dx}\left[x^2 \cdot (x^5 - e^{2x})^4\right] = [x^2]' \cdot (x^5 - e^{2x})^4 + x^2 \cdot \left[(x^5 - e^{2x})^4\right]' =$$

$$2x \cdot (x^5 - e^{2x})^4 + x^2 \cdot 4\,(x^5 - e^{2x})^3\,(5x^4 - 2e^{2x})$$

4. Sejam

$$f(u) = \frac{e^u}{1 - e^u} \quad \text{e} \quad g(x) = \sqrt{x}$$

(a)

$$(f \circ g)(x) := f\,[\,g(x)\,] = f\,\left[\,\sqrt{x}\,\right] = \frac{e^{\sqrt{x}}}{1 - e^{\sqrt{x}}}$$

O domínio da função composta é: $D_{f\circ g} := \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \in D_g \ \wedge \ g(x) \in D_f \ \}$.
Neste caso, $D_g = \mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty[$ e $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, logo:

$$D_{f\circ g} = \left\{x \in \mathbb{R} \ : \ x \geq 0 \ \wedge \ \sqrt{x} \neq 0\right\} = \mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$$

(b) Use a regra da cadeia, $(f \circ g)'(x) = f'[\,g(x)\,] \cdot g'(x)$, para calcular $(f \circ g)'(x)$.

$$\begin{aligned} f'(u) &= \left(\frac{e^u}{1 - e^u}\right)' = \frac{(e^u)' \cdot (1 - e^u) - e^u \cdot (1 - e^u)'}{(1 - e^u)^2} = \\ &= \frac{e^u \cdot (1 - e^u) - e^u \cdot (-e^u)}{(1 - e^u)^2} = \frac{e^u - (e^u)^2 + (e^u)^2}{(1 - e^u)^2} = \frac{e^u}{(1 - e^u)^2} \end{aligned}$$

$$g'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\,\sqrt{x}}$$

Pela regra da cadeia (regra da derivação da função composta):

$$(f \circ g)'(x) = f'\,[g(x)] \cdot g'(x) = f'\left[\sqrt{x}\,\right] \cdot \frac{1}{2\,\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{(1 - e^{\sqrt{x}})^2} \cdot \frac{1}{2\,\sqrt{x}}$$

5. Calcule cada integral e esboce o conjunto cuja área calculou:

(a) Comecemos por calcular a primitiva:

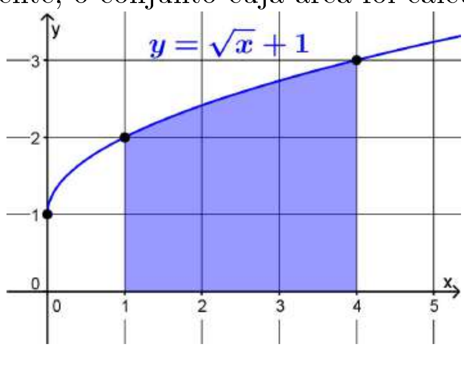
$$\int (\sqrt{x} + 1)\;dx = \int (x^{1/2} + 1)\;dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + x + C = \frac{2}{3}x^{3/2} + x + C$$

Usando o T.F.C. (regra de Barrow):

$$\int_1^4 (\sqrt{x} + 1)\;dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} + x\right]_1^4 = \left(\frac{2}{3} \cdot 4^{3/2} + 4\right) - \left(\frac{2}{3} \cdot 1^{3/2} + 1\right) =$$

$$= \left(\frac{2}{3} \cdot 2^3 + 4\right) - \left(\frac{2}{3} + 1\right) = \frac{16}{3} + 4 - \frac{2}{3} - 1 = \frac{14}{3} + 3 = \frac{23}{3}$$

Finalmente, o conjunto cuja área foi calculada é:



(b) A função que se pretende integrar é:

$$|x-1| = \begin{cases} -(x-1) & , \text{ se } x-1<0 \\ x-1 & , \text{ se } x-1 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -x+1 & , \text{ se } x<1 \\ x-1 & , \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$$

Decompondo o intervalo de integração $[-1,2] = [-1,1] \cup [1,2]$, teremos:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{2} |x-1|\, dx &= \int_{-1}^{1} |x-1|\, dx + \int_{1}^{2} |x-1|\, dx \\ &= \int_{-1}^{1} (-x+1)\, dx + \int_{1}^{2} (x-1)\, dx = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares:

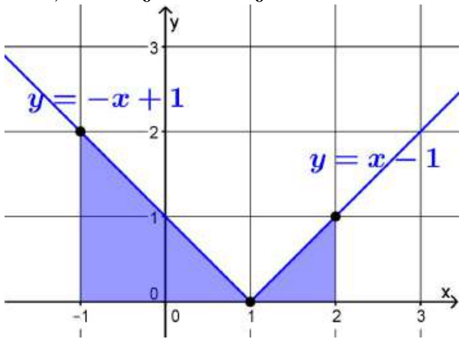
$$\int_{-1}^{1} (-x+1)\, dx = \left[-\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{1} = \left(-\frac{1^2}{2}+1\right) - \left(-\frac{(-1)^2}{2} + (-1)\right) =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}+1\right) - \left(-\frac{1}{2}-1\right) = \frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right) = 2$$

$$\int_{1}^{2} (x-1)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{1}^{2} = \left(\frac{2^2}{2}-2\right) - \left(\frac{1^2}{2}-1\right) =$$

$$= (2-2) - \left(\frac{1}{2}-1\right) = 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Finalmente, o conjunto cuja área foi calculada é:



6. (a) Iremos utilizar o método de primitivação por substituição de variável:

$$y = x-1 \quad \Leftrightarrow \quad x = y+1 \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad dy = dx$$

$$\begin{aligned} \int x \cdot \sqrt{x-1}\, dx &= \int (y+1) \cdot \sqrt{y}\, dy = \int (y+1) \cdot y^{1/2}\, dy = \\ &= \int \left(y^{3/2} + y^{1/2}\right) dy = \frac{y^{5/2}}{5/2} + \frac{y^{3/2}}{3/2} + C \\ &= \frac{2}{5}(x-1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + C \end{aligned}$$

(b) Utilizaremos o método de primitivação por partes $\displaystyle\int u{\cdot}v'\,dx = u{\cdot}v - \int u'{\cdot}v\,dx$.

Designemos $u = \ln(x)$, $v' = x^2$, logo $u' = \dfrac{1}{x}$ e $v = \dfrac{x^3}{3}$.

$$\int \underbrace{\ln(x)}_{u} \cdot \underbrace{x^2}_{v'}\,dx = \underbrace{\ln(x)}_{u} \cdot \underbrace{\frac{x^3}{3}}_{v} - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'} \cdot \underbrace{\frac{x^3}{3}}_{v}\,dx =$$

$$= \ln(x) \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\int x^2\,dx = \ln(x) \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{9} + C$$

7. Sendo f contínua, as funções integrandas são contínuas e os integrais indefinidos de funções contínuas são diferenciáveis, de acordo com o Teorema Fundamental do Cálculo (1).
Assim, todos os termos da equação são funções diferenciáveis, logo:

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)' &= \left(xe^{2x}\right)' + \left(\int_0^x e^{-t} f(t)\,dt\right)' \\
f(x) &= (x)' \cdot e^{2x} + x \cdot (e^{2x})' + e^{-x} f(x) \\
f(x) - e^{-x} f(x) &= e^{2x} + 2xe^{2x} \\
f(x) &= \frac{(1+2x)e^{2x}}{1-e^{-x}}\ .
\end{aligned}$$

Capítulo 10

Apêndice

10.1 Formulário de derivadas

$(k)' = 0$	$(u \pm v)' = u' \pm v'$
$(x^r)' = r \cdot x^{r-1}$	$(k\,u)' = k \cdot u'$
$(k\,x^r)' = k \cdot r \cdot x^{r-1}$	$(u^r)' = r \cdot u^{r-1} \cdot u'$
$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
$(e^u)' = u' \cdot e^u$	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

k e r são constantes e $u = f(x)$ e $v = g(x)$

10.2 Formulário de primitivas

$\int k\,dx = k\,x + C$	$\int (u \pm v)\,dx = \int u\,dx \pm \int v\,dx$
$\int e^{kx}dx = \dfrac{1}{k} \cdot e^{kx} + C$	$\int (k \cdot u)\,dx = k \cdot \int u\,dx$
$\int x^p\,dx = \dfrac{1}{p+1} \cdot x^{p+1} + C \ (p \neq -1)$	$\int [u]^p \cdot u'\,dx = \dfrac{1}{p+1} \cdot [u]^{p+1} + C \ (p \neq -1)$
$\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln\|x\| + C$	$\int \dfrac{u'}{u}\,dx = \ln\|u\| + C$
$\int u\,v'\,dx = u\,v - \int u'\,v\,dx$	

k e r são constantes, e $u = f(x)$ e $v = g(x)$.